Екс <u>Екстремуми на $f(x,y)$ при условие $\varphi(x,y)=0$</u>

Да предположим, че $x=x(t)$, $y=y(t)$ и за $\varphi(x(t),y(t))=0$ е изпълнено $t\in[a,b]$ 11309

Възможно $x=t$, $y=y(x)$.

$F(t)=f(x(t),y(t))$

$F(t)$ има екстремум в т. $t=t_0$, ако $F'(t_0)=0$

$$\frac{dF}{dt}=f'_x\cdot\dot{x}(t)+f'_y\cdot\dot{y}(t)=\nabla f\cdot(\dot{x},\dot{y})$$

Сл. условие е $\nabla f=(f'_x,f'_y)\perp(\dot{x},\dot{y})$ за $t\in[a,b]$

От друга страна за $t\in[a,b]$

$$0=\frac{d\,\varphi(x(t),y(t))}{dt}=\varphi'_x\cdot\dot{x}(t)+\varphi'_y\,\dot{y}(t)=\nabla\varphi\cdot(\dot{x},\dot{y})$$

Сл. $\nabla\varphi=(\varphi'_x,\varphi'_y)\perp(\dot{x},\dot{y})$

б/у $\varphi(x,y)=$

Сл. ако F има екстремум в т. (x_0,y_0), $x_0=x(t_0)$, $y_0=y(t_0)$

то (1) $$\boxed{\nabla f(x_0,y_0)=\lambda\nabla\varphi(x_0,y_0)\quad\text{за } \lambda\in\mathbb{R}}$$

И така търсим (x_0,y_0), за които $\exists\lambda$

$$(2)\quad\left|\begin{array}{l} f'_x=\lambda\varphi'_x \\ f'_y=\lambda\varphi'_y \\ \varphi(x_0,y_0)=0\end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{l} f'_x-\lambda\varphi'_x=0 \\ f'_y-\lambda\varphi'_y=0 \\ \varphi(x,y)=0\end{array}\right.$$

Нека $L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\varphi(x,y)$ - ф-я на Лагранж

$L_x' = f_x' - \lambda\varphi_x'$; $L_y' = f_y' - \lambda\varphi_y'$

С. (2) е еквивалентно с

$$(3) \quad \begin{cases} L_x' = L_y' = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases}$$

Решенията на горната с-ма дават точките, където е възможен екстремум

За

$$\frac{d^2F}{dt^2} = f_{xx}''\dot{x}^2 + 2f_{xy}''\dot{x}\dot{y} + f_{yy}''\dot{y}^2 + f_x'\ddot{x} + f_y'\ddot{y} \underset{от (1)}{=}$$

$$= f_{xx}''\dot{x}^2 + 2f_{xy}''\dot{x}\dot{y} + f_{yy}''\dot{y}^2 + \lambda(\varphi_x'\ddot{x} + \varphi_y'\ddot{y})$$

Диференцирайки $0 = \varphi_x'\dot{x} + \varphi_y'\dot{y}$ получаваме

$$0 = \varphi_{xx}''\dot{x}^2 + 2\varphi_{xy}''\dot{x}\dot{y} + \varphi_{yy}''\dot{y}^2 + \varphi_x'\ddot{x} + \varphi_y'\ddot{y} \quad , \text{т.е}$$

Сл.

$$\varphi_x'\ddot{x} + \varphi_y'\ddot{y} = -(\varphi_{xx}''\dot{x}^2 + 2\varphi_{xy}''\dot{x}\dot{y} + \varphi_{yy}''\dot{y}^2)$$

Сл.

$$\frac{d^2F}{dt^2} = (f_{xx}'' - \lambda\varphi_{xx}'')\dot{x}^2 + 2(f_{xy}'' - \lambda\varphi_{xy}'')\dot{x}\dot{y} + (f_{yy}'' - \lambda\varphi_{yy}'')\dot{y}^2 =$$

$$= L_{xx}''\dot{x}^2 + 2L_{xy}''\dot{x}\dot{y} + L_{yy}''\dot{y}^2$$

От $0 = \varphi_x'\dot{x} + \varphi_y'\dot{y} \Rightarrow \dot{y} = -\frac{\varphi_x'}{\varphi_y'}\cdot\dot{x}$

Сл.

$$\frac{d^2F}{dt^2} = L''_{xx}\dot{x}^2 - 2L''_{xy}\frac{\varphi_x'}{\varphi_y'}\cdot\dot{x}^2 + L''_{yy}\left(\frac{\varphi_x'}{\varphi_y'}\right)^2\dot{x}^2$$

$$= \frac{1}{\varphi_y'^2}\left(L''_{xx}\varphi_y'^2 - 2L''_{xy}\varphi_x'\varphi_y' + L''_{yy}\varphi_x'^2\right)\dot{x}^2$$

Сл. $\operatorname{sign}\frac{d^2F}{dt^2} = \operatorname{sign}\left(L''_{xx}\varphi_y'^2 - 2L''_{xy}\varphi_x'\varphi_y' + L''_{yy}\varphi_x'^2\right)$

$$= -\operatorname{sign}\begin{vmatrix} 0 & \varphi_x' & \varphi_y' \\ \varphi_x' & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi_y' & L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix}$$, тъй като

$$\begin{vmatrix} 0 & \varphi_x' & \varphi_y' \\ \varphi_x' & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi_y' & L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix} = -\varphi_x'\begin{vmatrix} \varphi_x' & L''_{xy} \\ \varphi_y' & L''_{yy} \end{vmatrix} + \varphi_y'\begin{vmatrix} \varphi_x' & L''_{xx} \\ \varphi_y' & L''_{xy} \end{vmatrix}$$

$$= -\varphi_x'^2 L''_{yy} + 2\varphi_x'\varphi_y' L''_{xy} - \varphi_y'^2 L''_{xx}$$

Нека
$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \varphi_x' & \varphi_y' \\ \varphi_x' & L_{xx}'' & L_{xy}'' \\ \varphi_y' & L_{xy}'' & L_{yy}'' \end{vmatrix}$$

Ако $\underline{\Delta > 0}$ в точката (x_0, y_0), то $f(x_0, y_0)$ е минимум

тъй като $\operatorname{sign} \frac{d^2 F}{dt^2} = -\operatorname{sign}\Delta = \cancel{<} 0$

Ако $\Delta < 0$ в т. (x_0, y_0), то $f(x_0, y_0)$ е максимум

тъй като $\operatorname{sign} \frac{d^2 F}{dt^2} = -\operatorname{sign}\Delta > 0$

<u>Пример</u>: Да се намери минималното разстояние от точка $A(a, b)$ до кривата K: $\varphi(x, y) = 0$

Минимизираме $f(x, y) = (x-a)^2 + (y-b)^2 = d^2$ $\left(d = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\right)$

$f_x' = 2(x-a)$, $f_y' = 2(y-b)$, т.е. $\nabla f = 2(x-a, y-b)$

Тъй като ∇f и $\nabla \varphi = (\varphi_x', \varphi_y')$ трябва да са колинеарни,

то получаваме
$$\begin{cases} x - a = \lambda \varphi_x' \\ y - b = \lambda \varphi_y' \end{cases} \Rightarrow (x-a)\varphi_y' - (y-b)\varphi_x' = 0$$

Сл. трябва да решим с-мата
$$\begin{cases} (x-a)\varphi_y' - (y-b)\varphi_x' = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

за да намерим точката $B(x, y)$ в/у K, която е на минимално разстояние от $A(a, b)$.

За конкретност нека вземем $k: (x+y)^2 = 4(x-y)$ и $A=(-1,1)$

$\varphi(x,y) = (x+y)^2 - 4(x-y)$ $\quad \varphi'_x = 2x+2y-4$; $\varphi'_y = 2x+2y+4$

$\nabla\varphi = 2(x+y-2, x+y+2)$

Сл. имаме
$$\left| \begin{array}{l} x+1 = -2(x+y-2) \\ y-1 = -2(x+y+2) \end{array} \right., \text{ т.е.}$$

$$(x+1)(x+y+2) - (y-1)(x+y-2) = 0$$

или
$$(x+y)(x-y) + (x+y) + (x+y) + 2x + \cancel{2} + 2y - \cancel{2} = 0$$
$$(x+y)(x-y+4) = 0$$

И така с-мата е
$$\left| \begin{array}{l} (x+y)(x-y+4) = 0 \\ (x+y)^2 = 4(x-y) \end{array} \right.$$

Ако $x+y=0 \Rightarrow x-y=0 \Rightarrow \boxed{x=y=0}$

Ако $x-y+4=0 \Rightarrow (x+y)^2 = -16$ - невярно.

Сл. единствено реално решение $\boxed{x=y=0}$

Сл. $d = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$ е минимал. разстояние.