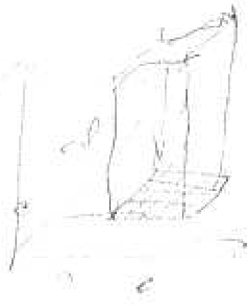
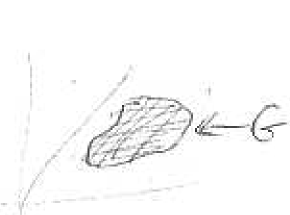
Двойни интеграли



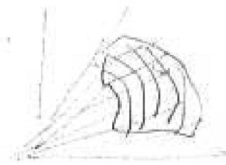
$f(x,y)$ $\quad [a,b]\times[c,d]=G$

$$\sum m_i \Delta x_i \Delta y_i \le \sum_{i}^{N} f(\xi_i,\eta_i)\,\Delta x_i \Delta y_i \le \sum M_i \,\Delta x_i \Delta y_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i,\eta_i)\,\Delta G_i \longrightarrow \iint_G f(x,y)\,dG$$



Означаване още $\iint_G f(x,y)\,dx\,dy$.



$f(x,y)$ е непр. в $[a,b]\times[c,d]$

$$A(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy \Longrightarrow \int_a^b A(x)\,dx = I$$

$$I=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]dx =$$

$$=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right]dy$$

T! $$\iint_G f(x,y)\,dS = \int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

Пример! $G=[1,2]\times[0,\pi]$ $\quad \iint_G y\sin(xy)\,dS = \int_1^2\int_0^\pi y\sin(xy)\,dy\,dx$

$$=\int_0^\pi\left[\int_1^2 y\sin(xy)\,dx\right]dy = \int_0^\pi\Big[-\cos(xy)\Big]_{x=1}^{2} dy = \int_0^\pi(-\cos 2y+\cos y)\,dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} d \sin 2y + \int_0^{\pi} d \sin y = 0 + 0 = 0$$

Ако $f(x,y) = g(x)\,h(y)$, то

$$\iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \left[\int_a^b g(x)\,dx\right] \cdot \left[\int_c^d h(y)\,dy\right]$$

1) Нека $G = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$

Тогава

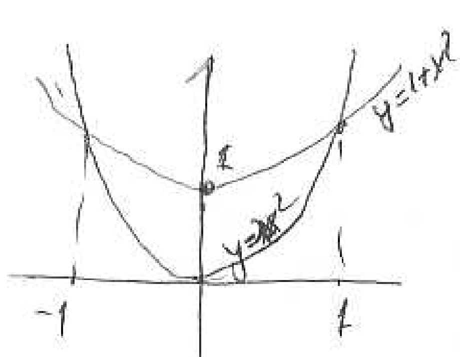
$$\iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right) dx$$

2) $G = \{(x,y) \mid c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$

Тогава

$$\iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\right) dy$$

Пример: 1 $I = \iint_G (x+2y)\,dx\,dy$, където G е



заключена м/у параболите $y = 2x^2$ и $y = 1 + x^2$

Параболите се пресичат в точките определени от $2x^2 = 1 + x^2 \Rightarrow x^2 = 1$, т.е точките $(-1, 2)$ и $(1, 2)$. Ограничения за y е $2x^2 \le y \le 1 + x^2$

Са $G = \{(x,y) \mid -1 \le x \le 1,\ 2x^2 \le y \le 1 + x^2\}$

$$I=\int_{-1}^{1}\int_{2x^2}^{1+x^2}(x+2y)\,dy\,dx=\int_{-1}^{1}\left((xy+y^2)\Big|_{2x^2}^{1+x^2}\right)dx=$$

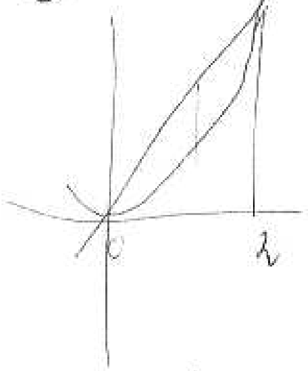
$$=\int_{-1}^{1}\left[x+x^3+1+2x^2+x^4-2x^3-4x^4\right]dx=\int_{-1}^{1}\left[1+x+2x^2-x^3-3x^4\right]dx$$

$$=\left(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4-\frac{3x^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{4}-\frac{3}{5}\right)-\left(-1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}-\frac{1}{4}+\frac{3}{5}\right)$$

$$=2+\frac{4}{3}-\frac{6}{5}=2+\frac{2}{15}=\frac{32}{15}$$

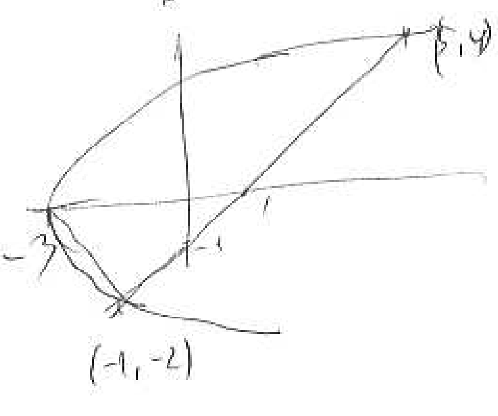
(2) $z=x^2+y^2$, D огр. от $y=2x$ и $y=x^2$



$D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 2,\ x^2\le y\le 2x\}$

$D=\{(x,y)\mid 0\le y\le 4,\ \frac{1}{2}y\le x\le \sqrt{y}\}$

(3) $\iint_D xy\,dx\,dy$ D огр. от $y=x-1$ и $y^2=2x+6$



$D=\{(x,y)\mid -2\le y\le 4,\ \frac{1}{2}y^2-3\le x\le y+1\}$

$D=\{(x,y)\mid$ — сума от регион.

① $\iint\limits_D (f+g)\,ds = \iint\limits_D f\,ds + \iint\limits_D g\,ds$

② $\iint\limits_D c f\,ds = c \iint\limits_D f(x,y)\,ds$

③ $f(x,y) \geq g(x,y)$ в $D \Rightarrow \iint\limits_D f\,ds \geq \iint\limits_D g\,ds$

④ $\iint\limits_D f\,ds = \iint\limits_{D_1} f\,ds + \iint\limits_{D_2} f\,ds$, $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2$

имат (а се пресич.) само по контура, т.е. нямат общи да тоже $\subsetneq D_1 \cap D_2$

⑤ $\iint\limits_D 1\,ds = S(D)$

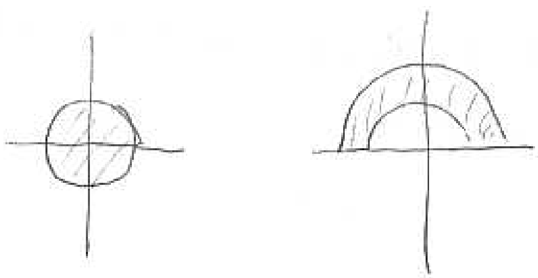
⑥ $m \leq f(x,y) \leq M$

$$m\,S(D) \leq \iint\limits_D f(x,y)\,ds \leq M \cdot S(D)$$

Двойни интеграли в полярни координати

Пресмятането на $\iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy$ за някои области

като тези на рисунката води до сложни еднократни интеграли по разгледания по-горе начин.



Но ако зададем точки в полярни координати (r,θ), т.е.

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta \qquad (r^2 = x^2+y^2)$$

(1) $D = \{(r,\theta) \mid a \le r \le b,\ \alpha \le \theta \le \beta\}$, $\beta - \alpha \le 2\pi$

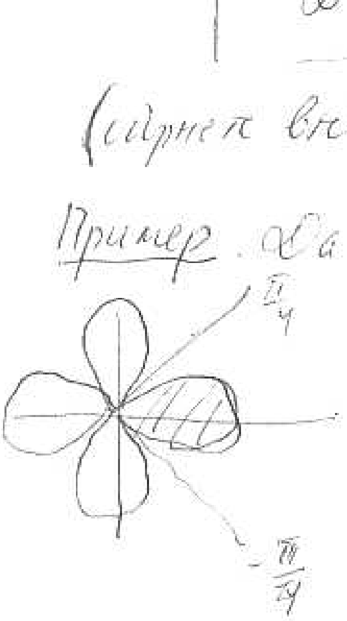
нещата се опростяват

Т: Ако f е непрекъсната в D (дадена с (1)), то

$$\boxed{\iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{a}^{b} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r\,dr\,d\theta}$$

(обърнете внимание на вмъкнатото r!)

Пример. Да се намери лицето на един лист от розетката зададена с $r = \cos 2\theta$.



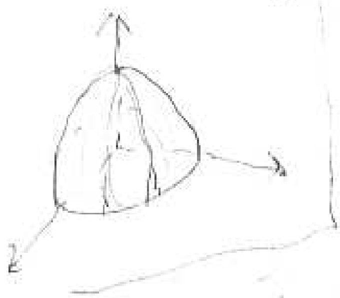
$$S(D) = \iint\limits_{D} ds,\ \text{където}$$

$$D = \{(r,\theta) \mid -\tfrac{\pi}{4} \le \theta \le \tfrac{\pi}{4},\ 0 \le r \le \cos 2\theta\}$$

$$S(D) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\cos 2\theta} 1\cdot r\,dr\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2 2\theta - 0)\,d\theta = \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 4\theta)\,d\theta$$

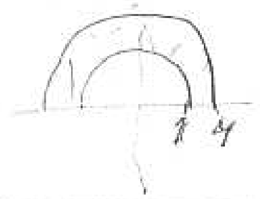
$$= \frac{1}{4}\theta\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{16}\sin 4\theta\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{16}(0-0) = \frac{\pi}{8}$$

Упр. (1) Намерете обема на тялото заградено от $z=0$ и параболоида $z = 1-x^2-y^2$ (отг. $\frac{\pi}{2}$)



(2) Намерете $\iint_B (3x+4y^2)\,dx\,dy$, където B е в горната полуравнина относно Ox и ограничено от $x^2+y^2=1$ и $x^2+y^2=4$

(отг. $\frac{15\pi}{2}$)



Плътност, маса и център на масата на равнина област

$\rho(x,y) = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta M}{\Delta S}$

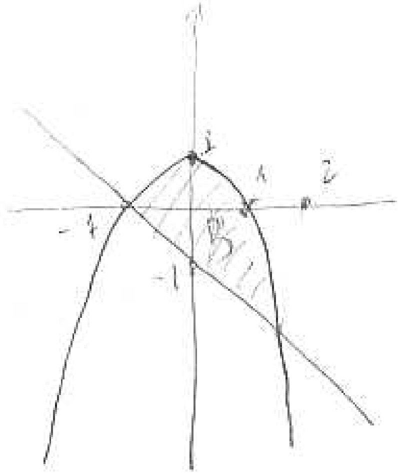
$$\boxed{m = \iint_B \rho(x,y)\,dx\,dy}$$ - цяла маса

$M(x_0, y_0)$ - център на масата, където

$$\boxed{x_0 = \frac{1}{m}\iint_B x\,dx\,dy \;;\quad y_0 = \frac{1}{m}\iint_B y\,dx\,dy}$$

хомогенна маса т.е. $\rho(x,y)=1$ тогава $m = S(B)$

Пример: $B: \left| \begin{array}{l} y = 1 - x^2 \\ x + y = -1 \end{array} \right.$



$B = \{(x,y) \mid -1 \le x \le 2,\ -x-1 \le y \le 1-x^2\}$

$-x-1 \le y \le 1-x^2$

$y = -x-1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$, т.е.

$x_1 = -1,\ x_2 = 2$

$$m = \iint\limits_B dxdy = \int_{-1}^{2}\int_{-x-1}^{1-x^2} dy\, dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} (1 - x^2 + x + 1)\, dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_{-1}^{2}$$

$$= -\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{9}{2}$$

$$\boxed{m = \frac{9}{2}}$$

$$m x_0 = \iint\limits_B x\, dxdy = \int_{-1}^{2}\int_{-x-1}^{1-x^2} x\, dy\, dx = \int_{-1}^{2} x(-x^2 + x + 2)\, dx =$$

$$= \left(-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{9}{4}. \quad \text{Сл.} \quad x_0 = \frac{9}{4} \Big/ \frac{9}{2} = \frac{1}{2}$$

$$m y_0 = \iint\limits_B y\, dxdy = \int_{-1}^{2}\int_{-x-1}^{1-x^2} y\, dy\, dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} \left[(1-x^2)^2 - (x+1)^2\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} (x^4 - 3x^2 - 2x)\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^5}{5} - \frac{3}{3}x^3 - x^2\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \cancel{\frac{9}{5}} \quad -\frac{27}{10} \quad = -\frac{3}{5} \Rightarrow \boxed{y_0 = -\frac{3}{5}}$$

Ц. центр $M = \cancel{\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{5}\right)}$ с $\boxed{m = \frac{9}{2}}$

$$M = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{5}\right)$$

4)

Маса и център на масата на дъга в пространството

Дъга C: $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $a \le t \le b$

Плътността $\rho(x,y,z)$ в точка t.

$$\boxed{m = \int_{s_0}^{s_1} \rho(x(s), y(s), z(s))\, ds}$$

интегрираме е по дължината на s от ~~а до~~ $s_0 = s(a)$, до $s_1 = s(b)$

т.е. дъгата е естествено параметризирана.

За центъра на масата имаме $M(x_0, y_0, z_0)$

$$\boxed{x_0 = \frac{1}{m}\int_{s_0}^{s_1} x \cdot \rho \cdot ds \,;\quad y_0 = \int_{s_0}^{s_1} y \cdot \rho\, ds \,;\quad z_0 = \int_{s_0}^{s_1} z \rho\, ds}$$

Може да изчислим параметризирано като времеви предвид, че $\frac{ds}{dt} = \|\dot{r}(t)\|$, т.е.

$$m = \int_{a}^{b} \rho \cdot \|\dot{r}(t)\|\, dt$$

Пример: Намерете центъра на тежестта на хомогенната дъга

$$C: \begin{cases} x = 1 + \frac{5\sqrt{2}}{2}\cos t & t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ y = 1 + \frac{5\sqrt{2}}{2}\cos t \\ z = 2 + 5\sin t \end{cases}$$

$\dot{x} = -\frac{5\sqrt{2}}{2}\sin t = \dot{y}$

$\dot{z} = 5\cos t$

$\|\dot{r}(t)\| = \sqrt{\frac{25}{2}\sin^2 t + \frac{25}{2}\sin^2 t + 25\cos^2 t} = 5$

$$m = \int_{s_0}^{s_1} ds = \int_0^{\pi/2} 5\, dt = \frac{5\pi}{2} \qquad \boxed{m = \frac{5\pi}{2}}$$

$$m x_0 = \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{5\sqrt{2}}{2}\cos t\right) \cdot 5\, dt = \frac{5\pi}{2} + \frac{25\sqrt{2}}{2}\int_0^{\pi/2} \cos t\, dt = \frac{5\pi}{2} + \frac{25\sqrt{2}}{2} \cdot \sin t \Big|_0^{\pi/2}$$

$$\boxed{x_0 = 1 + \frac{5}{\pi\sqrt{2}}} \qquad \boxed{y_0 = 1 + \frac{5}{\pi\sqrt{2}}} \qquad \boxed{z_0 = 2 + \frac{10}{\pi}}$$

Смяна на променливите при двойни интеграли

Нека е дадена гладка трансформация

(1) $x = g(u,v)\ ;\ y = h(u,v)$

т.е. g и h са с непрекъснати частни производни.

Нека тази трансформация е взаимно еднозначна, т.е. тя е обратима: $\exists\, G$ и H

$u = G(x,y)\ ;\ v = H(x,y)$

Детерминантата

(2) $$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$ се нарича Якобиан

$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ друго означение

$J \neq 0 \Leftrightarrow$ трансф. е обратима.

Пример: (1) Смяната в полярни координати

$x = r\cos\theta\ ;$ $y = r\sin\theta$ $\quad J = \begin{vmatrix} \cos\theta, & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$

(2) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\quad J = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{vmatrix}$

T: Ако при гладка трансф. (1) с $J \neq 0$ областта $\mathcal{D}$ отива в G, то

$$\boxed{\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{G} f(x(u,v), y(u,v))\,|J|\,du\,dv}\ ,\ J \neq 0$$

(ето откъде се взема r в интеграла в полярни координати)

Примери: ① Да се пресметне обема V на $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

▼ $\frac{1}{2}V$ е обема м/у повърхн. $z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ и Oxy

$$\frac{1}{2}V=\iint_D c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy, \qquad D=\{(x,y) \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\}$$

елипса

Смяна ~~$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$~~

$$\begin{cases} x=ar\cos\theta \\ y=br\sin\theta \end{cases} \qquad J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix}=$$

$$=abr, \qquad 0\le\theta\le 2\pi, \quad 0\le r\le 1, \text{ защото } r^2\le 1$$

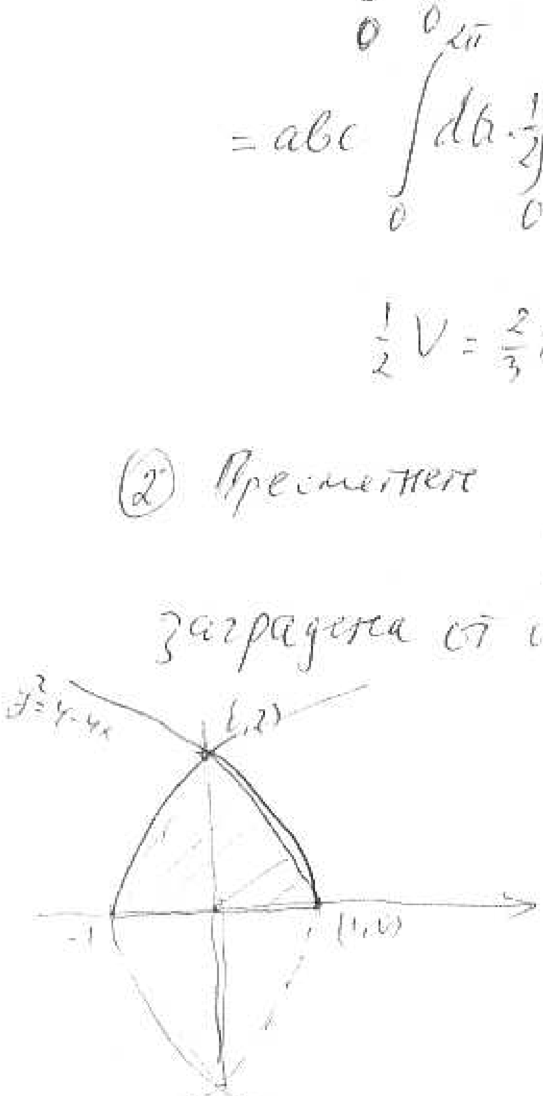
Сл.

$$\frac{1}{2}V=\int_0^{2\pi}\int_0^1 c\sqrt{1-r^2}\,abr\,dr\,d\theta=$$

$$=abc\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,dr^2=\pi abc\int_0^{-1}(1+u)^{1/2}du=\frac{2}{3}\pi abc\,(1+u)^{3/2}\Big|_0$$

$$\frac{1}{2}V=\frac{2}{3}\pi abc \Rightarrow \boxed{V=\frac{4}{3}\pi abc}$$

② Пресметнете $\iint_B y\,dxdy$, където B е областта заградена от оста Ox, и параболи $y^2=4-4x$, $y^2=4+4x$



Сменяме координатите

$x=u^2-v^2$; $y=2uv$, $u,v\ge 0$

$$J=\begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix}=4u^2+4v^2>0 \text{ при } u,v\ne 0$$

$y^2\le 4-4x \Rightarrow u^2v^2\le 1-u^2+v^2 \Rightarrow (u^2-1)(v^2+1)\le 0$

Сл. $u^2\le 1$. Аналогично $v^2\le 1$.

$C_1: (u,v) \in [0,1] \times [0,1]$

$$\iint_B y\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 2uv\,4(u^2+v^2)\,du\,dv = 8\int_0^1\int_0^1 (u^3v+uv^3)\,du\,dv$$

$$= 8\left[\int_0^1 u^3 du \int_0^1 v\,dv + \int_0^1 v^3 dv \int_0^1 u\,du\right] = 16\left(\frac{1}{4}u^4\right)\Big|_0^1 \cdot \left(\frac{1}{2}v^2\right)\Big|_0^1 =$$

$$= 16 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \underline{2}\ //$$