① Бесел ф-я $0$

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|^2}{4(n+1)^2} \to 0$$

② $R = ?$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{\sqrt{n+1}} x^n$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 3\sqrt{\frac{1+1/n}{1+2/n}} \cdot |x| \to 3|x| \Rightarrow R = \frac{1}{3}$$

$\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ сх

$x = -\frac{1}{3}$ - расх. $x = \frac{1}{3}$ сх-ся.

интер. $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ расх.

③ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}} \Rightarrow R = 3$. Нашли

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{|x+2|}{3} \to \frac{|x+2|}{3} < 1 \Rightarrow |x+2| < 3$$

Сх. сх. $(-5, 1)$ расх. при $[-5, 1]$

При $x = -5 \Rightarrow \frac{1}{3}\sum(-1)^n n$ - расх.

$x = 1 \Rightarrow \frac{1}{3}\sum n$ расх.

④ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x}}$, $f(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{4}\right)^{-1/2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \binom{-1/2}{n}\frac{x^n}{4^n}$

$$\binom{-1/2}{n} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} = (-1)^n \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}}{n!} =$$

$$= (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!}$$

О. $\boxed{f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{8^n \cdot n!} x^n}$

Развийте в степенен ред

(5) $f(x) = \sqrt[3]{1+x^2}$ ; (Нютонов бином $(1+x^2)^{1/3}$)

(6) $\int \sqrt{x^2+1}\,dx$ (интегрирай $(1+x^2)^{1/2} = \dots$ степ. ред)

(7) $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$ (развий $\frac{\sin x}{x}$ и интегрирай)

(8) $\int e^{x^2}\,dx$ (развий $e^{x^2}$ и интегрирай)

(9) $\ln(1-x)$ – (Маклоренов ред или интегр. $\frac{-1}{1-x}$)

(10) $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$

Развийте в ред на Фурие $x \in [-\pi, \pi]$

(1) $f(x) = x\cos x$ ; (2) $f(x) = \sin x(1+\cos x)$

(3) $f(x) = x^2\cos x$ ; (4) $f(x) = e^x$

Решение (4): $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x\,dx$ ; $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx\,dx$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx\,dx$ и т.н.

Намерете $\frac{\partial z}{\partial t}$ и $\frac{\partial z}{\partial s}$ за

① $z = \sin x \cos y$, $x = \pi t$, $y = \sqrt{t}$

② $z = x \ln(x+2y)$, ~~$x = s+t$, $y = st$~~ $x = \sin t$, $y = \cos t$

③ $z = x^2 + xy + y^2$, $x = s+t$, $y = st$

④ $z = \operatorname{arctg}(2x+y)$, $x = s^2 t$, $y = s \ln t$

⑤ $z = e^{xy} \operatorname{tg} y$, $x = s+2t$, $y = \frac{s}{t}$

⑥ $z = \sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$, $\alpha = 3s+t$, $\beta = s-t$;

⑦ $z = e^r \cos\theta$, $r = st$, $\theta = \sqrt{s^2+t^2}$

Решение ④: $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$

$$\boxed{\frac{\partial x}{\partial s} = 2st, \ \frac{\partial y}{\partial s} = \ln t \qquad \frac{\partial x}{\partial t} = s^2, \ \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{s}{t}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(2x+y)'_x}{1+(2x+y)^2} = \frac{2}{1+(2x+y)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+(2x+y)^2}$$

Сл. $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{2}{(2x+y)^2+1} \cdot s^2 + \frac{1}{(2x+y)^2+1} \cdot \frac{s}{t} =$

$= \dots$ ако искаме като $f(s,t)$

$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$ и т.н.

(1) Намерете производната на $f(x,y,z) = \frac{x}{y+z}$ в т. $(4,1,1)$, по направление $\vec{v} = (1,2,3)$

Решение: $f'_x = \frac{1}{y+z}$ ; $f'_y = f'_z = \frac{-x}{(y+z)^2}$

$$\nabla f(4,1,1) = \left(\frac{1}{1+1}, \frac{-4}{(1+1)^2}, \frac{-4}{(1+1)^2}\right) = \left(\frac{1}{2}, -1, -1\right)$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|v|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$$

$$D_a f(4,1,1) = \left(\frac{1}{2}, -1, -1\right) \cdot (1,2,3)\frac{1}{\sqrt{14}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{14}}\left(\frac{1}{2} - 2 - 3\right) = -\frac{9}{2\sqrt{14}}$$

(2) Същото за $f(x,y,z) = x\,\mathrm{arctg}\left(\frac{y}{z}\right)$, в т. $(1,2,-2)$ по вектор колинеарен с $\vec{v} = (1,1,-1)$

# Екстремуми на функции

① $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$. Да се намерят екстремуми и седлови точки

$f'_x = 4(x^3 - y)$; $f'_y = 4(y^3 - x)$. $f'_x = f'_y = 0$ води до система

$$\begin{cases} x^3 - y = 0 \\ y^3 - x = 0 \end{cases} \Longrightarrow x^9 - x = 0$$

$$x^9 - x = x(x^8 - 1) = x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = x(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$$

Реалните корени са само $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$

Тва дава критични точки $\boxed{O(0,0),\ A(1,1),\ B(-1,-1)}$

$f''_{xx} = 12x^2$; $f''_{xy} = -4$; $f''_{yy} = 12y^2$

$$D = \begin{vmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{vmatrix} = 144x^2y^2 - 16 = 16(9x^2y^2 - 1)$$

$D(0,0) = -16 < 0$ Сл. $O(0,0)$ е седлова точка

$D(1,1) = 16.8 = 128 > 0$, а $f_{xx}(1,1) = 12 > 0$ Сл. $A(1,1)$ лок. минимум

~~$D(-1,-1) = 12.(-1)^2 = 12 > 0$~~ $D(-1,-1) = D(1,1) = 128 > 0$, $f_{xx}(-1,-1) = 12 > 0$ $\Rightarrow$ локален минимум

② Да се построи паралепипед (кутия) с максимално възможен обем, измежду всички паралепипеди с пълна повърхнина $12\,m^2$.

Решение. Нека страните са $x, y, z$. $V = xyz$.

Пълната повърхнина е $2xz + 2yz + xy = 12$ (В условието е казано кутия, т.е. без едната страна)

Изразяваме $z$: $z = \dfrac{12 - xy}{2(x+y)}$

$$V = \frac{xy(12 - xy)}{2(x+y)} = \frac{12xy - x^2y^2}{2(x+y)}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{y^2(12 - 2xy - x^2)}{2(x+y)^2}; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x^2(12 - 2xy - y^2)}{2(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 12 - 2xy - x^2 = 0 \\ 12 - 2xy - y^2 = 0 \end{array} \right.$$ ($x, y = 0$ е невъзм.)

Сл. $x^2 = y^2 \Rightarrow y = \pm x$ но тъй като $y = x > 0$

Сл. $\left| \begin{array}{l} x^2 + 2x^2 - 12 = 0 \\ x > 0 \end{array} \right.$ $\left| \begin{array}{l} x^2 = 4 \\ x > 0 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{x = 2} \Rightarrow \boxed{y = 2}$

Сл. $\boxed{z = 2}$ Куб със страна 2 : $V = 8$

Още

(3) $f(x,y) = x^3y + 12x^2 - 8y$; (4) $f(x,y) = e^{4y - x^2 - y^2}$

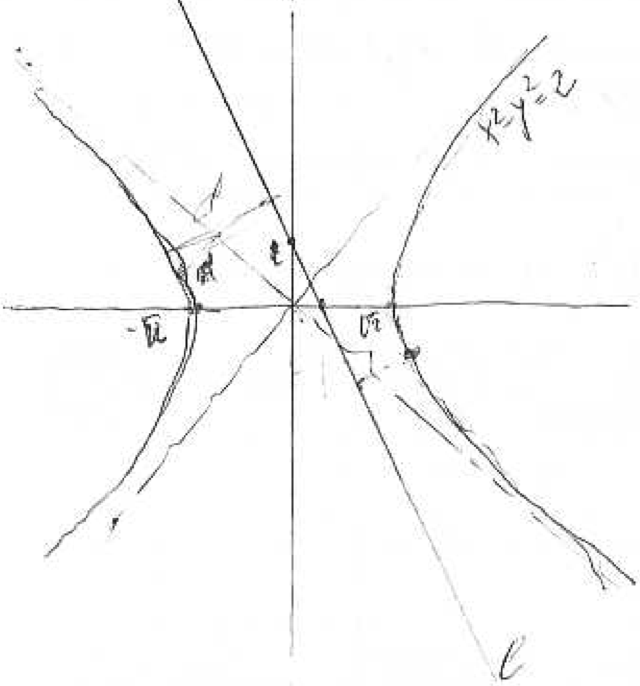
(5) $f(x,y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$; (7) $f(x,y) = e^x \cos y$

(8) $f(x,y) = x^3 - 3xy - 2x + \frac{9y^2}{2} - 6y$; (9) $f(x,y) = xy(1 - x - y)$

(10) $f(x,y) = 3xy - x^2y - xy^2$; (11) $f = (x^2 + y)e^{y/2}$

Намерете най-малкото разстояние до правата

$\ell: 2x+y-1=0$ от кривата $x^2-y^2=2$




Ще демонстрираме на тази задача няколко подхода

$$d = \left|\frac{2x+y-1}{\sqrt{5}}\right|$$

разст. от $(x,y)$ до правата.

<u>I подход</u> Ограничението $x^2-y^2=2$ го записваме като $y=\pm\sqrt{x^2-2}$

Търсим минималното число измежду екстремумите на функцията

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left|2x\pm\sqrt{x^2-2}-1\right|$$

<u>II подход</u> Ограничението $x^2-y^2=2$ задава неявно $x=x(y)$ и $y=y(x)$. Диференцирайки го получаваме

$$2x-2y\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}.$$

Аналогично
$$\frac{dx}{dy}=\frac{y}{x}$$

Сега ще търсим критичните точки за

$$f(x,y) = \frac{\pm 1}{\sqrt{5}}(2x+y-1)$$

Минималното разстояние ще е при някоя от критичните точки

$$f'_x = \frac{\pm 1}{\sqrt{5}}\left(2+\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\pm 1}{\sqrt{5}}\left(2+\frac{x}{y}\right) \qquad f'_x = 0 \Leftrightarrow 2y+x=0$$

$$f'_y = \frac{\pm 1}{\sqrt{5}}\left(2\frac{dx}{dy}+1\right) = \frac{\pm 1}{\sqrt{5}}\left(2\frac{y}{x}+1\right) \qquad f'_y = 0 \Leftrightarrow 2y+x=0$$

Сл. критичните точки са по правата $g: 2y+x=0$

Тогава $g \cap (x^2-y^2=2)$ дава

$$4y^2-y^2=2 \Rightarrow 3y^2=2 \Rightarrow \boxed{y=\pm\frac{\sqrt{6}}{3},\ x=\mp\frac{2\sqrt{6}}{3}}$$

т. $A\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ и $B\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ (симетрични относно началото)

$$d_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left|\frac{4\sqrt{6}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{3}-1\right| = \frac{1}{\sqrt{5}}|\sqrt{6}-1|$$

$$d_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left|-\frac{4\sqrt{6}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}-1\right| = \frac{1}{\sqrt{5}}|-1-\sqrt{6}| > d_1$$

Сл. $\boxed{d = \frac{\sqrt{6}-1}{\sqrt{5}}}$

III подход Точките на дадено разстояние $d$ от $\ell$ лежат на прави $\parallel$ на $\ell$ т.е. на прави

$$g: 2x+y+c=0$$

Ако съществува точка $A$ от хиперболата, която е на минимално разстояние, то $g$ трябва да е допирателна към хиперболата в т. $A$ (иначе в $A$ няма да има локален минимум).

Сл. $\vec{g}$ е колинеарен с тангентния вектор в т. $A$, а следователно $\nabla f(A)$ е ортогонален на $g$, т.е. $\nabla f(A)$ колинеарен с $\vec{n}_g = (2,1)$

$$h(x,y) = x^2 - y^2 - 2 \quad \text{- хипербол.}$$

на ~~$\nabla f = (f'_x, f'_y)$~~

$$h'_x = 2x, \quad h'_y = -2y \qquad \nabla h = (2x, -2y) = t(2,1)$$

Сл. $x = t$, $y = -\frac{t}{2}$. Но $t$ е такова че

$\left(t, -\frac{t}{2}\right)$ е от хиперболата $\Rightarrow$ $t^2 - \frac{t^2}{4} = 2$

Сл. $t = \pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$, т.е. $A = \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$; $B = \left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$