Глава 1

Функционални редици и редове.

1.1 Тригонометрични редове.

Дефиниция 1.1.1 *Нека $\mathcal{F}[a,b]$ е съвкупността от всички реални функции дефинирани и непрекъснати в интервала $[a,b]$.* ***Скаларно произведение на функциите*** *$f(x), g(x) \in \mathcal{F}[a,b]$ наричаме реалното число $< f, g >$ зададено с*

$$< f(x), g(x) > \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

Така въведеното скаларно произведения удовлетворява аксиомите за скаларно произведение известни ни от курса по линейна алгебра и аналитична геометрия, а именно

1. $< f, g > = < g, f >$
2. $< f, g + h > = < f, g > + < f, h >$
3. $< f, \lambda g > = < \lambda f, g > = \lambda < f, g >$
4. $< f, f > \geq 0$ като е нула $\Leftrightarrow f(x) = 0$.

Аналогично дефинираме **дължина** $\|f\|$ на функцията $f(x)$ като

$$\|f(x)\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{< f, f >} = \sqrt{\int_a^b f(x)^2\,dx}.$$

Пример 1.1.1 Функциите 1 и $\sin x$ са дефинирани и интегруеми в $[-\pi, \pi]$.

$$< 1, \sin x >= \int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx = 0$$

$$\|\sin x\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\,dx} = \sqrt{\pi}.$$

Дефиниция 1.1.2 *Две функции от $\mathcal{F}[a,b]$ наричаме* ***ортогонални,*** *ако скаларното им произведение е нула. Съвкупност от функции на $\mathcal{F}[a,b]$ с единична дължина, които са две по две ортогонални наричаме* ***ортонормирана система.***

Трансформация от $\mathcal{F}[a,b]$ към $\mathcal{F}[-1,1]$.

Полагайки
$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}, \qquad \text{т.е.} \quad t = \frac{2x-a-b}{b-a} \tag{1.1}$$
функцията $f(x) \in \mathcal{F}[a,b]$ се преобразува във функцията $g(t) \in \mathcal{F}[-1,1]$ и обратно. Описаната трансформация е взаимно-еднозначно преобразуване.

Дефиниция 1.1.3 *Една функция $f(x)$ дефинирана в $D \subseteq \mathbb{R}$ наричаме* ***периодична****, ако съществува T, такова че за всяко $x \in D$*
$$f(x+T) = f(x).$$
Минималното число T с описаното свойство се нарича ***период****.*

Например, функциите $\cos x$ и $\sin(\pi t)$ са периодични с периоди съответно 2π и 2.

Ако $f(x)$ е периодична интегруема функция с период T, то
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+T}^{b+T} f(x)\,dx \qquad \text{и} \qquad \int_c^{c+T} f(x)\,dx = \int_d^{d+T} f(x)\,dx$$
за всеки a, b, c, d, стига функцията да е дефинирана и интегруема в съответния интервал.

Ако $f(x)$ е дефинирана в интервала $[-l, l]$ тя може да се продължи до периодична функция в $\mathbb{R}$ чрез полагането
$$f(x + 2nl) = f(x),$$
където n описва $\mathbb{Z}$.

Теорема 1.1.4 *Нека $f(x)$ и $g(x)$ са съответно нечетна и четна функции дефинирани и непрекъснати в $[-a, a]$. В сила са следните равенства*
$$\int_{-a}^a f(x)g(x)\,dx = \int_{-a}^a f(x)\,dx = 0; \qquad \int_{-a}^a g(x)\,dx = 2\int_0^a g(x)\,dx \tag{1.2}$$

Теорема 1.1.5 *Функциите*
$$\frac{1}{2},\ \cos(\pi t),\ \sin(\pi t),\ \ldots,\ \cos(\pi k t),\ \sin(\pi k t),\ \ldots, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{1.3}$$
образуват ортогонална система от дефинирани и непрекъснати в $[-1,1]$ функции (с период 2,т.е. непериодични в интервала), като дължината на всяка функция с изключение на $1/2$ е единица, а $\|1/2\| = 1/\sqrt{2}$.

Доказателство. Твърдението следва от следните равенства:
$$\int_{-1}^1 \frac{1}{2}\sin(\pi k t)\,dt = \int_{-1}^1 \frac{1}{2}\cos(\pi k t)\,dt = \int_{-1}^1 \cos(\pi k t)\sin(\pi l t)\,dt = 0;$$
$$\int_{-1}^1 \cos(\pi k t)\cos(\pi l t)\,dt = \int_{-1}^1 \sin(\pi k t)\sin(\pi l t)\,dt = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ 1, & k = l \end{cases};$$
$$\int_{-1}^1 \frac{1}{4}\,dt = \frac{1}{2}.$$

Да разгледаме редицата от сумите

$$S_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_n \cos(\pi kt) + b_n \sin(\pi kt)), \qquad t \in [-1, 1]. \tag{1.4}$$

Ако тази редица е сходяща и клони към функцията $f(t)$, $t \in [-1, 1]$, при $n \to \infty$, то казваме, че $f(t)$ се **развива в ред на Фурие** в $[-1, 1]$ и записваме

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_n \cos(\pi kt) + b_n \sin(\pi kt)). \tag{1.5}$$

Тъй като функциите (1.3) са две по две ортогонални, то за всяко $n \geq k$

$$a_k =< S_n(t), \cos(\pi kt) >, \qquad b_k =< S_n(t), \sin(\pi kt) >, \qquad a_0 = 2 < S_n(t), \frac{1}{2} > .$$

Оставяйки $n \to \infty$ получаваме, че

$$a_k =< f(t), \cos(\pi kt) >, \qquad b_k =< f(t), \sin(\pi kt) >, \qquad a_0 = 2 < f(t), \frac{1}{2} > .$$

Следователно

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f(t)\, dt \tag{1.6}$$

$$a_k = \int_{-1}^{1} f(t) \cos(\pi kt)\, dt \tag{1.7}$$

$$b_k = \int_{-1}^{1} f(t) \sin(\pi kt)\, dt \tag{1.8}$$

Важно!:

Да отбележим, че съгласно (1.2) ако $f(t)$ е четна (т.е. симетричва относно ординатата) в $[-1, 1]$, то $b_n = 0$, тъй като $\sin(\pi kt)$ е нечетна функция. Аналогично, ако $f(t)$ е нечетна (т.е. с централно симетрична графика) в $[-1, 1]$, то $a_n = a_0 = 0$, По общо, ако $f(t) - b$ е нечетна (транслационно нечетна), където b е константа, то $a_n = 0$, за $n \geq 1$ и $a_0 = 2b$.

Пример 1.1.2 Да развием в ред на Фурие функцията

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & x \in [-2, -1] \\ 5 + 2x, & x \in [-1,\ 0] \end{cases}.$$

Следвайки (1.1) полагаме $x = t - 1$ и трансформираме $f(x)$ във функцията

$$g(t) = \begin{cases} 3 - 2t, & t \in [-1, 0] \\ 3 + 2t, & t \in [0, 1] \end{cases}.$$

$g(t)$ е очевидно четна функция (графиката ѝ е дадена на фиг. и е симетрична относно ординатата).

Следователно $b_n = 0,\ n \geq 1$, а за останалите коефициенти получаваме

$$a_0 = \int_{-1}^{1} g(t)\,dt = 2\int_0^1 (3+2t)\,dt = 2.4 = 8.$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_{-1}^{1} g(t)\cos(\pi n t)\,dt = 2\int_0^1 (3+2t)\cos(\pi n t)\,dt = 6\int_0^1 \cos(\pi n t)\,dt + 4\int_0^1 t\cos(\pi n t)\,dt \\
&= \frac{4}{n\pi}\int_0^1 t\,d\sin(\pi n t) = \frac{4}{n\pi} t\sin(\pi n t)\Big|_0^1 - \frac{4}{n\pi}\int_0^1 \sin(\pi n t)\,dt = \frac{4}{n^2\pi^2}\cos(\pi n t)\Big|_0^1 \\
&= \frac{4}{n^2\pi^2}[(-1)^n - 1] = \begin{cases} 0, & n = 2k \neq l \\ -\frac{8}{(2k+1)^2\pi^2}, & n = 2k+l \end{cases};
\end{aligned}$$

Следователно

$$g(t) = 4 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{(2k+1)^2\pi^2}\cos((2k+1)\pi t)$$

откъдето

$$f(x) = 4 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{(2k+1)^2\pi^2}\cos((2k+1)\pi(x+1)) = 4 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{(2k+1)^2\pi^2}\cos((2k+1)\pi x.$$

Пример 1.1.3 Да развием в ред на Фурие функцията $f(x) = x$ в интервала $[-\pi, \pi]$. Полагайки $x = \pi t$ получаваме $g(t) = \pi t$, която е дефинирана и интегруема в $[-1, 1]$. Очевидно $g(t)$ е нечетна функция и следователно

$$a_n = 0,\ n \geq 0.$$

Трябва да изчислим само b_n.

$$\begin{aligned}
b_n &= \int_{-1}^{1} \pi t\sin(\pi n t)\,dt = -\frac{1}{n}\int_{-1}^{1} t\,d\cos(\pi n t) = -\frac{1}{n} t\cos(\pi n t)\Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{n}\int_{-1}^{1}\cos(\pi n t)\,dt = \\
&= -\frac{1}{n}[\cos(n\pi) - (-1)\cos(-n\pi)] = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}.
\end{aligned}$$

Следователно

$$g(t) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(n\pi t)}{n},$$

откъдето

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(nx)}{n}.$$

Полагайки $x = \pi/2$ получаваме следното любопитно равенство

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots \tag{1.9}$$

Пример 1.1.4 Да развием в ред на Фурие функцията $f(x) = x^2$ в интервала $[-\pi, \pi]$. Както в предния пример полагайки $x = \pi t$ получаваме $g(t) = \pi^2 t^2$, която е дефинирана и интегруема в $[-1, 1]$. Очевидно $g(t)$ е четна функция и следователно $b_n = 0, \quad n \geq 1$. Трябва да изчислим a_0 и $a_n,\ n \geq 1$.

$$a_0 = \int_{-1}^{1} g(t)\,dt = 2\pi^2 \int_0^1 t^2\,dt = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Използвайки отново симетричността относно ординатата имаме за $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_{-1}^{1} g(t)\cos(\pi n t)\,dt = \frac{2\pi}{n}\int_0^1 t^2\,d\sin(\pi n t) = \frac{2\pi}{n} t^2 \sin(\pi n t)\Big|_0^1 - \frac{2\pi}{n}\int_0^1 2t\sin(\pi n t)\,dt = \\
&= -\frac{4\pi}{n}\int_0^1 t\sin(\pi n t)\,dt = \frac{4}{n^2}\int_0^1 t\,d\cos(\pi n t) = \frac{4}{n^2} t\cos(\pi n t)\Big|_0^1 - \frac{4}{n^2}\int_0^1 \cos(\pi n t)\,dt = \\
&= \frac{4\cos(n\pi)}{n^2} = (-1)^n \frac{4}{n^2}.
\end{aligned}$$

Следователно

$$g(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(n\pi t)}{n^2},$$

откъдето

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

Полагайки $x = 0$ получаваме следното равенство

$$\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots, \tag{1.10}$$

а при $x = \pi$ равенството

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots.$$

Пример 1.1.5 Да развием в ред на Фурие функцията $f(x) = 5 + 2x$ в интервала $[-2, 0]$. Полагаме $x = t - 1$ и разглеждаме $g(t) = 2t + 3$ в интервала $[-1, 1]$. Тъй като $g(t) - 3 = 2t$ е нечетна в $[-1, 1]$, то $a_n = 0$ за $n \geq 1$ и $a_0 = 2 \cdot 3 = 6$. За b_n можем да ползваме резултата от Пример 1.1.3 като го умножим по 2, но за упражнение ще го изчислим.

$$\begin{aligned}
b_n &= \int_{-1}^{1} (2t+3)\sin(k\pi t)\,dt = -\frac{2}{k\pi}\int_{-1}^{1} t\,d\cos(k\pi t) + 3\int_{-1}^{1}\sin(k\pi t)\,dt = \\
&= -\frac{2}{k\pi} t\cos(\pi n t)\Big|_{-1}^{1} + \frac{2}{k\pi}\int_{-1}^{1}\cos(k\pi t)\,dt + 3 \cdot 0 = -\frac{2}{k\pi} 2(-1)^k = (-1)^{k+1}\frac{4}{k\pi}.
\end{aligned}$$

Следователно

$$g(t) = 3 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{4}{k\pi}\sin(k\pi t); \qquad f(x) = 3 - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(k\pi x)}{k}.$$