Криволинейни интеграли от II-ри род

Нека е дадено векторно поле, т.е. непрекъсната векторна ф-я

$$F(x,y,z) = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big) \in \mathbb{R}^3$$

Нека C е крива зададена с $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ и $T(t) = \frac{\dot r(t)}{\|\dot r(t)\|}$ е тангенция вектор в т. $(x_0,y_0,z_0) \leftrightarrow t$

Да разделим кривата на малки дъги с дължина Δs. За малко Δs движението на ~~частица~~ материалната точка е по тангента T и извършената работа е

$$F(x_0,y_0,z_0)\cdot\big(\Delta s\, T(t_0)\big), \quad t_0 \leftrightarrow (x_0,y_0,z_0)$$

т.е.

$$\Delta s\cdot(F\cdot T),$$

т.е. общата работа е

$$W = \sum (F\cdot T)\,\Delta s$$

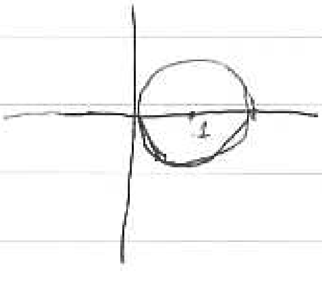
Оставяйки $\Delta s \to 0$ получаваме

$$W = \int_C F(x,y,z)\cdot T(t)\,ds = \int_a^b F(r(t))\cdot\frac{\dot r(t)}{\|\dot r(t)\|}\|\dot r(t)\|\,dt$$

$$W = \int_a^b F\cdot\dot r(t)\,dt = \int P(t)\dot x\,dt + \int Q(t)\dot y(t)\,dt$$

Намерете работата, която извършва сила $F(xy, -x-y)$ пренасяйки ~~то~~ точка с маса единица по кривата $C: \begin{cases} x^2+y^2-2x=0 \\ y\leq 0 \end{cases}$

Кривата е полуокръжн : $(x-1)^2+y^2=1$



Преминаваме към полярни координати

$x=\rho\cos\theta$
$y=\rho\sin\theta$

$C: \begin{cases} \rho^2=2\rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta\leq 0 \end{cases}$

$C.$ $\boxed{\rho=2\cos\theta}$ $\sin\theta\leq 0$, $\cos\theta\geq 0$, $\boxed{-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq 0}$

$x(\theta)=2\cos^2\theta=\cos 2\theta+1$
$y(\theta)=2\cos\theta\sin\theta=\sin 2\theta$

$\dot r(\theta)=(-2\sin 2\theta, 2\cos 2\theta)$

$F=\left((1+\cos 2\theta)\sin 2\theta, -1-\cos 2\theta-\sin 2\theta\right)$

$F\dot r=-2\sin^2 2\theta\cos 2\theta-2\sin^2 2\theta-2\cos^2 2\theta-2\cos 2\theta-2\cos 2\theta\sin 2\theta$
$=-2\sin^2 2\theta\cos 2\theta-2-2\cos 2\theta-2\cos 2\theta\sin 2\theta$

$W=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} F.\dot r\,d\theta=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 2\theta\, d\sin 2\theta-2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}d\theta-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos 2\theta\, d2\theta-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sin 2\theta\, d\sin 2\theta$

$=-\frac{1}{3}\sin^3 2\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}-2\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}-\sin 2\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}=$

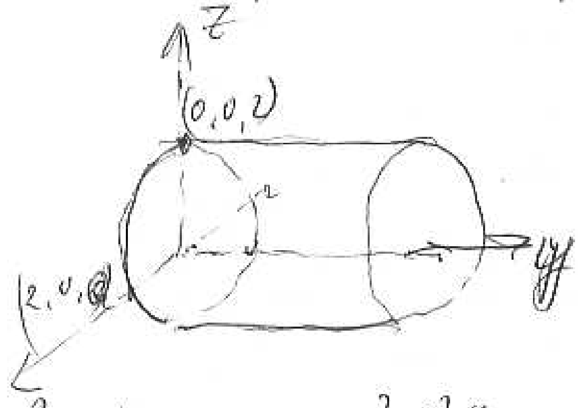
$=-\cancel{2}\frac{\pi}{\cancel{2}}=-\pi$

Параметрично задаване на повърхнина

Повърхнини в $\mathbb{R}^3$ ~~се~~ може да се зададе с векторна ф-я на два скаларни аргумента

$$r(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)), \quad (u,v)\in D$$

Пример $\quad r(u,v) = (2\cos u,\ v,\ 2\sin u)$



цилинд. $x^2+z^2=4$

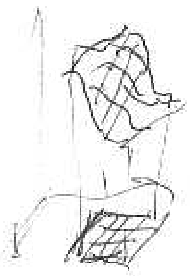
$$x^2+z^2 = 4(\cos^2 u+\sin^2 u) = 4$$

$c_1(u) = r(u,v_0)$ задава криви ~~пре~~ при (u,v_0)

$c_2(v) = r(u_0,v)$

Мрежа в/у повърхнината

$r(u_0,v_0)$ е пресечната точка на кривите $r(u,v_0)$ и $r(u_0,v)$



Ако $r(u,v)$ е гладка параметрична повърхнина A (т.е. x, y, z гладки ф-ции на u, v), то лицето

$$\boxed{S(A) = \iint_D \|r_u\times r_v\|\,du\,dv}$$

, където D е дефин. областта на $r(u,v)$

$$r_u = \frac{\partial r}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right);\quad r_v = \frac{\partial r}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

Разделяме D на ~~пр. Δu~~ Δv правоъгълници със страни $\Delta u, \Delta v$. Ако (u_i,v_j) е ~~ъгъл~~ връх на такъв правоъгълник, то $r(u_i,v_j)$ ~~е~~ ъгъл на съотв. елемент от повърхнината

~~Лицето S_{ij} = ||r~~ $r_u(u_i,v_j)$ и $r_v(u_i,v_j)$ са допирателни вект.

Лицето $S_{ij} = \|r_u(u_i,v_j)\times r_v(u_i,v_j)\|\,\Delta u\,\Delta v \Rightarrow S(A) = \sum_i\sum_j \|r_u\times r_v\|\,\Delta u\,\Delta v$

Сумата клони към интеграла

Ако повърхнината е зададена с $z = f(x,y)$, т.е. $u=x$, $v=y$
то $r(x, y, f(x,y)) \Rightarrow r_x = (1, 0, f_x)$ Сл.

$r_y = (0, 1, f_y)$

$r_x \times r_y = (-f_x, -f_y, 1)$ - вектор нормален към повърхн.

Сл.

$$\boxed{S(A) = \iint\limits_D \sqrt{1 + (f_x')^2 + (f_y')^2}\, dx\,dy}$$

$\vec{n} = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|}$

Интеграл по повърхнина

Нека $f(x,y,z)$ е ф-я дефинирана в/у повърхност S
Разделяйки S чрез мрежа на малки парчета S_{ij}
образуваме $\sum\limits_i \sum\limits_j f(P_{ij}) \Delta S_{ij}$,

където P_{ij} е точка от S_{ij}, ΔS_{ij} лицето на S_{ij}
Оставяме $\Delta S_{ij} \to 0$

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\, dS = \lim_{m,n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(P_{ij}) \Delta S_{ij}$$

Ако $S: z = g(x,y)$, то $\Delta S_{ij} \approx \Delta T_{ij} = \sqrt{(g_x')^2 + (g_y')^2 + 1}\, dx\,dy$

$$\boxed{\iint\limits_S f(x,y,z)\, dS = \iint\limits_D f(x,y,g(x,y)) \sqrt{(g_x')^2 + (g_y')^2 + 1}\, dx\,dy}$$

Ако S параметр. с $r(u,v)$

$$\boxed{\iint\limits_S f(x,y,z)\, dS = \iint\limits_D f(r(u,v)) \|r_u \times r_v\|\, du\,dv}$$

Ако повърхнината е зададена параметрично

$r(u,v) = (x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v))$, $(u,v) \in D$

то може да се провери, че

$$\|r_u \times r_v\| = \sqrt{EG - F^2}, \text{ където}$$

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \quad G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2, \quad F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$$

Сл. $\boxed{S = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv}$

$$\boxed{\iint\limits_S f(x,y,z)\, dS = \iint\limits_D f(r(u,v)) \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv}$$