Глава 2

Матрици и детерминанти

Нека $\mathbb{F}$ е числово поле. Ние ще се интересуваме главно от случая $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (в някои случаи $\mathbb{F} = \mathbb{C}$), но ако не е указано изрично противното изложените резултати са в сила за всяко числово поле.

2.1 Матрици и действия с тях.

Дефиниция 2.1.1 ***Матрица*** $\boldsymbol{A}$ ***от ред*** *$m \times n$ над $\mathbb{F}$ наричаме правоъгълна таблица с m реда и n стълба от елементи на $\mathbb{F}$. Бележим с*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

При $m = n$ матрицата се нарича ***квадратна*** *от ред n. Матрица от ред $m \times n$, всички елементи на която са нули се нарича* ***нулева*** *и бележи с $\boldsymbol{O}_{m\times n}$. Квадратна матрица от ред n имаща единици по главния диагонал и нули на всички други позиции, т.е.*

$$\boldsymbol{E}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

се нарича ***единична матрица*** *от ред n.*

Множеството от квадратните матрици от ред n над $\mathbb{F}$ се означава много често в литературата с $M_n(\mathbb{F})$. Ние ще се придържаме към същото означение.

Две матрици $\mathbf{A} = (a_{ij})$ и $\mathbf{B} = (b_{ij})$ считаме равни, когато са от един и същи тип и $a_{ij} = b_{ij}$ за всяко $i = 1, \dots, m$ и $j = 1, \dots, n$.

Дефиниция 2.1.2 *Под **сума** $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ **на матриците от един и същи тип** $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ **и** $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ разбираме матрицата*

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \overset{\text{def}}{=} (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Дефиниция 2.1.3 ***Произведение на матрицата $\boldsymbol{A}$ с числото*** λ *наричаме матрицата*

$$\lambda \boldsymbol{A} \overset{\text{def}}{=} (\lambda a_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица, всички елементи на която са нули се нарича ***нулева матрица*** и бележи с $\mathbf{O}$. Квадратна матрица, чиито елементи по главния диагонал са единици, а всички останали нули се нарича ***единична матрица*** и бележи с $\mathbf{E}_n$ (или само с $\mathbf{E}$, ако размерността се подразбира от контекста). Матрицата $-\mathbf{A} = (-a_{ij})$ се нарича ***противоположна*** на $\mathbf{A} = (a_{ij})$.

Дефиниция 2.1.4 ***Произведение на матрицата $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ от тип $m \times n$ с матрицата $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ от тип $n \times k$*** *наричаме матрицата $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = (c_{ij})$, където*

$$c_{ij} \overset{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} b_{\nu j} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}.$$

Умножение на матрици се дефинира само в случая, когато броят на стълбовете на първия множител съвпада с броя на редовете на втория множител. Следователно, ако произведението $\mathbf{AB}$ съществува (според дадената дефиниция), то е възможно $\mathbf{BA}$ да не съществува изобщо (съгласно дефиницията) или да е различно от $\mathbf{AB}$, ако съществува.

Твърдение 2.1.5 *За произволни матрици и произволни числа са в сила следните свойства:*

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A} \qquad 1.\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$$
$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) \qquad (\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$$
$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A} \qquad \lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$$
$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O} \qquad \lambda(\mu\boldsymbol{A})=(\lambda\mu)\boldsymbol{A}$$

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})$$
$$\lambda(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$$
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$$
$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$$

Същите своиства остават в сила и за правоъгълни матрици стига означените операции да са изпълними (т.е. дефиницията им да има смисъл за разглежданите правоъгълни матрици)

Доказателство. Ще докажем само асоциативния закон при умножението. Другите свойства се доказват аналогично, при това някои следват съвсем директно от дефинициите.

Нека $\mathbf{A}=(a_{ij})$, $\mathbf{B}=(b_{ij})$, $\mathbf{C}=(c_{ij})$, $\mathbf{AB}=\mathbf{P}=(p_{ij})$, $\mathbf{BC}=\mathbf{Q}=(q_{ij})$, $(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{S}=(s_{ij})$, и $\mathbf{A}(\mathbf{BC})=\mathbf{T}=(t_{ij})$. Тогава

$$\begin{aligned} s_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} p_{ik}c_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rk}\right)c_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rk}c_{kj} \\ &= \sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ir}b_{rk}c_{kj} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{rk}c_{kj}\right) = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}q_{rj}c_{kj} = t_{ij} \end{aligned}$$

Следователно $\mathbf{S}=\mathbf{T}$, с което асоциативния закон е доказан.

Под k-та степен на квадратната матрица $\mathbf{A}$ ще разбираме $\mathbf{A}^k=\underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A}\cdots\mathbf{A}}_{k}$.

Лесно се вижда, че са в сила свойствата

$$\mathbf{A}^{k+m}=\mathbf{A}^k.\mathbf{A}^m \qquad \text{и} \qquad (\mathbf{A}^k)^m=\mathbf{A}^{km}.$$

Нека $f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m$ е полином с коефициенти от същото числово поле, от което са елементите на квадратната матрица $\mathbf{A}$. ***Стойност на полинома*** $f(x)$ ***при*** $x=\boldsymbol{A}$ наричаме матрицата

$$f(\mathbf{A})\stackrel{\text{def}}{=}a_0\mathbf{A}^m+a_1\mathbf{A}^{m-1}+\cdots+a_{m-1}\mathbf{A}+a_m\mathbf{E}.$$

Ако $f(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$, то казваме, че $\mathbf{A}$ ***е корен на полинома*** $f(x)$.

2.2 Детерминанти от n-ти ред.

В тази параграф ще дефинираме изображение от $M_n(\mathbb{F})$ в $\mathbb{F}$, т.е. ще дефинираме правило, с което на всяка квадратна матрица $\mathbf{A}$ от ред n съпоставяме число от $\mathbb{F}$. Последното ще бележим с $\det \mathbf{A}$ или $|\mathbf{A}|$ и ще наричаме ***детерминанта*** на $\mathbf{A}$. За целта обаче са ни необходими някои понятия и твърдения.

Дефиниция 2.2.1 ***Пермутация*** *на n елемента $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ наричаме всяка тяхна подредба.*

Например, abc, acb, bac, bca, cab, cba са всички пермутации на елементите $\{a,\ b,\ c\}$.

Твърдение 2.2.2 *Броят на пермутациите на n елемента е точно $n! = 1.2.3\ldots n$.*

> ***Доказателство.*** Доказателството ще извършим по метода на математическата индукция. При $n = 1$ твърдението е очевидно вярно. Да предположим, че то е в сила при произволно множество от $n-1$ елементи. При това предположение ще покажем верността на твърдението и за n елемента.
>
> Нека $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ е множество от n елемента. За първи елемент на произволна тяхна пермутация $b_1 b_2 \ldots b_n$ можем да бъде избран кой да е от тях, т.е. имаме точно n възможности за първия елемент b_1. Нека $b_1 = a_i$. Останалите $n-1$ елемента представляват пермутация на $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \setminus \{a_i\}$ и съгласно индукционното предположение има $(n-1)!$ възможности за тях. Следователно общият брой на пермутациите на n елемента е $n.(n-1)! = n!$.

Очевидно всяка пермутация на елементите $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ се определя еднозначно от пермутацията на индексите $1, 2, \ldots, n$. Затова по нататък ще разглеждаме само пермутации на числата $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Дефиниция 2.2.3 *Казваме, че две числа в една пермутация образуват* ***инверсия,*** *ако по-голямото от тях предхожда по-малкото. Броят на инверсиите в пермутацията $k_1, k_2, \ldots, k_n$ на числата $\{1, 2, \ldots, n\}$ ще бележим с $[k_1 k_2 \ldots k_n]$*

Дефиниция 2.2.4 *Една пермутация наричаме* ***четна,*** *ако броят на инверсиите в нея е четно число. В противния случай тя се нарича* ***нечетна****.*

Например в пермутацията 1234 няма инверсии, т.е. $[1234] = 0$, докато в пермутацията 1432 те са три: 4 с 3, 4 с 2, и 3 с 2, т.е. $[1432] = 3$. Следователно първата пермутация е четно, а втората нечетна.

Дефиниция 2.2.5 *Казваме, че в пермутацията $k_1k_2\cdots k_n$ е извършена* ***транспозицията*** *(k_i, k_j), ако са разменени единствено местата на елементите k_i и k_j.*

Например след транспозиция $(2,3)$ пермутацията 12453 добива вида 13452

Лема 2.2.6 (за пермутациите) *Ако в една пермутация разместим два елемента (т.е. извършим транспозиция), то четността ѝ се променя.*

Доказателство. Първоначално ще докажем лемата при разместване на два съседни елементи, откъдето след това ще изведем твърдението и в общия случай.

Нека към пермутацията $a_1 \ldots a_i a_{i+1} \ldots a_n$ приложим транспозицията (a_i, a_{i+1}). Тогава, ако $k = [a_1 \ldots a_i a_{i+1} \ldots a_n]$ и $m = [a_1 \ldots a_{i+1} a_i \ldots a_n]$, то $m = k - 1$ при $a_i > a_{i+1}$ и $m = k + 1$ при $a_i < a_{i+1}$. Наистина броят на инверсиите, които a_i (аналогично a_{i+1}) образува с числата $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+2}, \ldots, a_n$ не се изменя при транспозицията, а a_i и a_{i+1} вече не образуват инверсия или съответно образуват нова инверсия. Следователно и в двата случая след разместването на a_i и a_{i+1} четността на пермутацията се променя.

Нека сега разместим i-тия и j-тия елемент на пермутацията $a_1 \ldots a_i a_{i+1} \ldots a_{j-1} a_j a_{j+1} a_n$. Това е еквивалентно на поредица размествания на два съседни елемента, а именно разместваме a_i последователно с a_{i+1}, a_{i+2} и т.н. с a_j. Следователно извършваме $j - i$ размествания. След това разместваме последователно a_j с a_{j-1}, a_{j-2} и т.н. с a_{i+1}, т.е. извършваме още $j - i - 1$ размествания на два съседни елемента. Общият брой размествания е нечетното число $2(j - i) - 1$, т.е. сменяме четността нечетен брой пъти. Това означава, че пермутацията след разгледаната транспозиция е с променена четност. С това теоремата е доказана.

Като пример да разгледаме транспозиция $(1,5)$ приложена към пермутацията 126543. Имаме $[126543] = 0+0+3+2+1 = 6$, а $[526143] = 4+1+5+0+1 = 9$.

Тъй като чрез транспозиция от всяка четна пермутация се получава нечетна и всяка нечетна пермутация може да се получи по този начин, то получаваме следното следствие

Следствие 2.2.7 *Броят на четните пермутации съвпада с този на нечетните и е равен на $n!/2$.*

След направените уводни бележки вече сме подготвени да преминем към дефиницията на детерминанта от $n-$ти ред.

Дефиниция 2.2.8 *Нека $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ е квадратна матрица от ред n.* ***Детерминанта*** *на $\boldsymbol{A}$ наричаме числото*

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1 j_2 \dots j_n)} (-1)^{[j_1 j_2 \dots j_n]} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n},$$

където сумирането е по всички пермутации $(j_1 j_2 \dots j_n)$ на вторите индекси. Детерминантата на $\boldsymbol{A}$ ще бележим също така с $|\boldsymbol{A}| = |a_{ij}|$.

Съгласно дадената дефиниция $\det \mathbf{A}$ е число получено като сума на $n!$ събираеми, всяко от които е произведение на n елемента на матрицата като от всеки ред и стълб е взет точно по един елемент. Пред всяко от събираемите "плюс", ако пермутацията от вторите индекси е четна "минус", ако е нечетна.

Пример 2.2.1 Ще илюстрираме дефиницията с развитие на детерминантата на матрица от втори ред.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{[12]} a_{11} a_{22} + (-1)^{[21]} a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21},$$

т.е. детерминантата от втори ред е равна на разликата от произведенията на елементите по двата диагонала.

Пример 2.2.2 Детерминантата на матрица от трети ред се получава като сума на шест събираеми, три от които със знак "$+$" и три със знак "$-$":

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{[123]}a_{11}a_{22}a_{13} + (-1)^{[132]}a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^{[213]}a_{12}a_{21}a_{33} +$$

$$(-1)^{[231]}a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^{[312]}a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^{[321]}a_{13}a_{22}a_{31} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Детерминантата от трети ред е равна на сумата от произведенията по диагоналите $\diagdown$ минус произведенията по диагоналите $/\!\!/$:

$$\left|\begin{array}{cccccc|cccc} a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{11} & & a_{12} \\ & \diagdown & & \times & & \times & & /\!\!/ & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & & a_{22} \\ & /\!\!/ & & \times & & \times & & \diagdown & \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{31} & & a_{32} \end{array}\right.$$

Пример 2.2.3 Като следващ пример ще пресметнем детерминантата на така наречените **триъгълни матрици**, т.е. квадратни матрици имащи само нули под (или над) главния диагонал.Ще покажем, че

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Наистина, ако в дадено събираемо от развитието на детерминантата е взет елемент от първия ред различен от a_{11}, то понеже от първия стълб трябва да участва елемент произведението ще има множител нула (всички елементи в първия стълб без a_{11}) са нули) и следователно ще е равно на нула. Аналогично ненулево ще бъде само събираемо, в което от втория ред участва само a_{22} и т.н.

Дадената по-горе дефиниция на детерминанта не е симетрична по отношение на първите и вторите индекси. Следващото твърдение показва, че в действителност те са равностойни.

Теорема 2.2.9 *Ако $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ е квадратна матрица от ред n, то*

$$\det \boldsymbol{A} = \sum (-1)^{[i_1 i_2 \dots i_n] + [j_1 j_2 \dots j_n]} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n}, \tag{2.2.1}$$

където сумирането се извършва по всички пермутации $(j_1 j_2 \dots j_n)$ на вторите индекси при фиксирани първи индекси $i_1, i_2, \dots, i_n$ или по всички пермутации на първите индекси при фиксирана пермутация на вторите индекси.

Доказателство. В дясната страна на (2.2.1) участват $n!$ събираеми и тъй като разместването на множителите не променя произведението, то с точност до знака си събираемите в дясната страна на (2.2.1) съвпадат с тези в дефиницията на детерминанта. Следователно твърдението ще бъде доказано, ако покажем, че знакът на $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n}$ в (2.2.1) съвпада с този на същото събираемо (но с подредени първи индекси) $a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n}$ участващо в дефиницията на детерминантата. Наистина подреждайки първите индекси в растящ ред посредством последователни транспозиции ще се променя едновременно четността на $i_1 i_2 \dots i_n$ и $j_1 j_2 \dots j_n$, т.е. четността на сумата от броя на инверсиите в пермутациите на първите и на вторите индекси не се променя. Следователно

$$(-1)^{[i_1 i_2 \dots i_n] + [j_1 j_2 \dots j_n]} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n} =$$
$$(-1)^{[1\,2 \dots n] + [k_1 k_2 \dots k_n]} a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n} = (-1)^{[k_1 k_2 \dots k_n]} a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n}.$$

С това теоремата е доказана.

2.3 Основни свойства на детерминантите.

Дефиниция 2.3.1 ***Транспонирана матрица на*** $m \times n$ ***матрицата*** $\boldsymbol{A}$ *наричаме $n \times m$ матрицата $\boldsymbol{A}^\tau$, чиито стълбове са съответните редове на $\boldsymbol{A}$, т.е.*

$$\boldsymbol{A}^\tau = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

или изказано с други думи: ако $\boldsymbol{A}^\tau = (b_{ij})$, то $b_{ij} = a_{ji}$.

Свойство 2.3.1 *Детерминантата на транспонираната матрица* $\det \boldsymbol{A}^\tau$ *е равна на детерминантата на* $\boldsymbol{A}$, *т.е.* $\det \boldsymbol{A}^\tau = \det \boldsymbol{A}$.

Доказателство. Съгласно Теорема 2.2.9 вземайки предвид, че $b_{ij} = a_{ji}$ получаваме

$$\begin{aligned}\det \mathbf{A}^\tau &= \sum (-1)^{[i_1 i_2 \dots i_n]+[j_1 j_2 \dots j_n]} b_{i_1 j_1} b_{i_2 j_2} \dots b_{i_n j_n} = \\ &= \sum (-1)^{[j_1 j_2 \dots j_n]+[i_1 i_2 \dots i_n]} a_{j_1 i_1} a_{j_2 i_2} \dots a_{j_n i_n} = \det \mathbf{A}.\end{aligned}$$

Доказаното свойство показва, че редовете и стълбовете на една детерминанта са равноправни. Следователно **всички свойства формулирани за редовете остават в сила и за стълбовете**. Затова по-нататък ние ще формулираме свойствата само за редове.

Свойство 2.3.2 *Ако елементите на i-тия ред на една детерминанта са суми на две събираеми, то тя може да се представи като сума от две детерминанти, всички редове на които съвпадат със съответните на дадената детерминанта, а i-тия ред на първата се състои от първите събираеми, а този на втората - от вторите събираеми, т.е.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a'_{i1} + a_{i1}" & a'_{i2} + a_{i2}" & \dots & a'_{in} + a_{in}" \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \dots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}" & a_{i2}" & \dots & a_{in}" \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Доказателство. Съгласно дефиницията на детерминанта

$$\begin{aligned}\Delta &= \sum_{(j_1 j_2 \dots j_i \dots j_n)} (-1)^{[j_1 j_2 \dots j_n]} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots (a'_{ij_i} + a''_{ij_i}) \dots a_{nj_n} = \\ &= \sum_{(j_1 j_2 \dots j_i \dots j_n)} (-1)^{[j_1 j_2 \dots j_n]} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a'_{ij_i} \dots a_{nj_n} + \\ &+ \sum_{(j_1 j_2 \dots j_i \dots j_n)} (-1)^{[j_1 j_2 \dots j_n]} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a''_{ij_i} \dots a_{nj_n} = \Delta' + \Delta''\end{aligned}$$

Свойство 2.3.3 *Ако елементите на i-тия ред на една матрица умножим с едно и също число λ, то детерминантата ѝ се умножава с това число λ, т.е.*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda . \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Доказателство. Това свойство също следва директно от дефиницията:

$$\Delta = \sum_{(j_1 j_2 \dots j_i \dots j_n)} (-1)^{[j_1 j_2 \dots j_n]} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots \lambda a_{ij_i} \dots a_{nj_n} =$$
$$= \lambda \sum_{(j_1 j_2 \dots j_i \dots j_n)} (-1)^{[j_1 j_2 \dots j_n]} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{ij_i} \dots a_{nj_n} = \lambda \det \mathbf{A}$$

Следствие 2.3.2 *Ако всички елементи на един ред са нули (т.е. има нулев ред), то детерминантата е нула.*

Свойство 2.3.4 *Детерминантата на матрица, която съдържа два еднакви реда е нула.*

Доказателство. Нека i-тия и j-тия ред на матрицата $\mathbf{A} = (a_{ij})$ съвпадат, т.е. $a_{i1} = a_{j1},\ a_{i2} = a_{j2},\ \dots,\ a_{in} = a_{jn}$. Нека за конкретност $i < j$. Тогава произведенията $a_{1t_1} a_{2t_2} \dots a_{ik} \dots a_{jl} \dots a_{nt_n}$ (т.е. $t_i = k,\ t_j = l$) и $a_{1t_1} a_{2t_2} \dots a_{il} \dots a_{jk} \dots a_{nt_n}$ (т.е. $t_i = l,\ t_j = k$) са равни за всяка двойка (k, l). Следователно събираемите в развитието на детерминантата може да се групират в $n!/2$ двойки от еднакви по абсолютна стойност произведения. Тези произведения, обаче са с противоположни знаци, тъй като пермутациите на вторите им индекси се различават с транспозиция на i-тата и j-тата позиция. Следователно те ще се унищожат при сумирането и детерминантата ще се окаже нула.

Следствие 2.3.3 *Детерминантата на матрица с два пропорционални реда е нула.*

Наистина, ако за една матрица $a_{lk} = \lambda a_{ik}, k = 1, 2, \dots, n$, то детерминантата ѝ според Свойство 2.3.3 е числото λ умножено по детерминантата на матрица със съвпадащи i-ти и j-ти редове, която съгласно Свойство 2.3.4 трябва да е нула.

От Свойство 2.3.2 и горното следствие се получава веднага много полезно при пресмятане на детерминанти свойство:

Свойство 2.3.5 *Детерминантата на матрица не се променя, ако към някой неин ред прибавим друг ред умножен с произволно число.*

Свойство 2.3.6 *Ако разменим местата на два реда на една матрица детерминантата ѝ се променя само по знак.*

Доказателство. Използвайки предходните свойства получаваме

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_i \\ \boldsymbol{a}_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}_j \\ \boldsymbol{a}_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}_j \\ -\boldsymbol{a}_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_j \\ -\boldsymbol{a}_j \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_j \\ \boldsymbol{a}_i \end{vmatrix},$$

където $\boldsymbol{a}_i$ и $\boldsymbol{a}_j$ са i-тия и j-тия ред на детерминантата.

Дефиниция 2.3.4 *Казваме, че i-тият ред на една детерминанта е* ***линейна комбинация на останалите редове****, ако може да се представи като сума на тези редове умножени с подходящи числа, т.е. ако съществуват числа $\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n$, такива че за всяко $j = 1, 2, \dots, n$ да е изпълнено*

$$a_{ij} = \lambda_1 a_{1j} + \lambda_2 a_{2j} + \cdots + \lambda_{i-1} a_{i-1,j} + \lambda_{i+1} a_{i+1,j} + \cdots + \lambda_n a_{nj}$$

Свойство 2.3.7 *Ако някой от редовете на една матрица е линейна комбинация на останалите редове, то детерминантата ѝ е нула.*

Доказателство. След няколкократно прилагане на Свойство 2.3.5 получаваме, че изходната детерминанта е равна на детерминанта с нулев ред и следователно е нула.

Пример 2.3.1 Използвайки доказаните свойства ще пресметнем следната детерминанта:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 5 & -4 & 7 \\ 2 & 7 & 5 & -11 \\ 3 & 8 & -11 & 2 \\ -5 & 4 & 7 & 8 \end{vmatrix}$$

Умножаваме първия стълб по 5 и го прибавяме към втория; след това умножаваме пак първия стълб, но по -4 и го прибавяме към третия стълб;

накрая към четвъртия стълб прибавяме първия умножен по 7. Съгласно Свойство 2.3.5 получаваме, че

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 17 & -3 & 3 \\ 3 & 23 & -23 & 23 \\ -5 & -21 & 27 & -27 \end{vmatrix} = 0.$$

Последните два стълба на детерминантата са равни и следователно съгласно Свойство 2.3.4 тя е нула.

Пример 2.3.2 Да пресметнем детерминантата

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a & a & a & \dots & x \end{vmatrix}$$

Най-напред изваждаме първия ред от всички останали. Получаваме детерминанта от така наречения вид "пачи крак". За да я пресметнем прибавяме всички стълбове към първия и получаваме триъгълна детерминанта:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a-x & x-a & 0 & \dots & 0 \\ a-x & 0 & x-a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a-x & 0 & 0 & \dots & x-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \dots & a \\ 0 & x-a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-a \end{vmatrix} =$$

$$= [x+(n-1)a]\,(x-a)^{n-1}.$$

2.4 Адюнгирани количества и поддетерминанти.

Нека $\Delta = |a_{ij}|$ е детерминанта от n-ти ред. Да групираме всички $(n-1)!$ събираеми в развитието на Δ, които съдържат елемента a_{ij}. Получава се изразът

$$a_{ij}\left(\sum(-1)^{[j_1 \dots j_{i-1}\, j\, j_{i+1} \dots j_n]} a_{1,j_1} \dots a_{i-1,j_{i-1}} a_{i+1,j_{i+1}} \dots a_{n,j_n}\right),$$

където сумирането в скобите се извършва по всевъзможните $(n-1)!$ пермутации $j_1 \dots j_{i-1}\, j_{i+1} \dots j_n$ на вторите индекси без i-тия.

Дефиниция 2.4.1 *Сумата от $(n-1)!$ събираеми, която остава в скобите след изнасяне на общия множител a_{ij} се нарича* ***адюнгирано количества на елемента*** *a_{ij} и се бележи с A_{ij}, т.е.*

$$A_{ij} \overset{\text{def}}{=} \sum (-1)^{[j_1 \dots j_{i-1}\, j\, j_{i+1} \dots j_n]} a_{1,j_1} \dots a_{i-1,j_{i-1}} a_{i+1,j_{i+1}} \dots a_{n,j_n}.$$

Дефиницията на адюнгирано количество показва, че A_{ij} не зависи от елементите на i-тия ред и j-тия стълб, т.е. ако две детерминанти се различават само по i-тия ред (или j-тия стълб), то адюнгираните количества $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in}$ на елементите от i-тия ред (съответно адюнгираните количества на елементите на j-тия стълб) съвпадат за двете детерминанти.

Всички $n!$ събираеми в развитието на Δ могат да се групират по посочения начин в n групи от по $(n-1)!$ събираеми. Събираемите в j-тата група ($j = 1, 2, \dots, n$) имат общ множител a_{ij}. Следователно дефиницията на адюнгирано количество ни дава, че за всяко $i = 1, 2, \dots, n$

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}. \tag{2.4.1}$$

Поради равноправието на редовете и стълбовете в една детерминанта за всяко $j = 1, 2, \dots, n$ е в сила

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}. \tag{2.4.2}$$

Равенствата (2.4.1) и (2.4.2) се наричат ***развитие на детерминантата по i-тия ред, съответно по j-тия стълб***.

Дефиниция 2.4.2 *Нека $\Delta = |a_{ij}|$ е детерминанта от n-ти ред.* ***Поддетерминанта на Δ съответстваща на елемента*** *a_{ij} наричаме детерминантата от $n-1$-ви ред Δ_{ij} получена от Δ чрез премахване на i-тия ред и j-тия стълб, т.е.*

$$\Delta_{ij} \overset{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \dots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \dots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & \dots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \dots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Съгласно дадената в §2.2 дефиниция на детерминанта имаме

$$\Delta_{ij} = \sum (-1)^{[k_1 \dots k_{i-1}\, k_{i+1} \dots k_n]} a_{1\,k_1} \dots a_{i-1\,k_{i-1}} a_{i+1\,k_{i+1}} \dots a_{n\,k_n}, \tag{2.4.3}$$

където сумирането се извършва по всевъзможните $(n-1)!$ пермутации $k_1 \dots k_{i-1}\, k_{i+1} \dots k_n$ на числата $1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, n$.

Пример 2.4.1 Да намерим адюнгираните количества и поддетерминантите на елементите от първия стълб на детерминанта от трети ред, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{21}(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \end{aligned}$$

Следователно

$$A_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}, \quad A_{21} = a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}, \quad A_{31} = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}.$$

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} = A_{11}$$

$$\Delta_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -A_{21}, \quad \Delta_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = A_{31}$$

Разгледаният пример илюстрира и следната теорема

Теорема 2.4.3 *За всяка детерминанта е в сила* $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$.

Доказателство. Съгласно дефиницията на адюнгирано количество

$$A_{ij} = \sum (-1)^{[j_1 \cdots j_{i-1}\, j\, j_{i+1} \cdots j_n]} a_{1,j_1} \dots a_{i-1,j_{i-1}} a_{i+1,j_{i+1}} \dots a_{n,j_n}.$$

Тъй като пермутацията от $j_1 \dots j_{i-1}\, j\, j_{i+1} \dots j_n$ след $i-1$ размествания се получава пермутацията $j\, j_1 \dots j_{i-1}\, j_{i+1} \dots j_n$, то $[j_1 \dots j_{i-1}\, j\, j_{i+1} \dots j_n]$ и $[j\, j_1 \dots j_{i-1}\, j_{i+1} \dots j_n] + (i-1)$ са с еднаква четност. Освен това j образува с останалите числа в $j\, j_1 \dots j_{i-1}\, j_{i+1} \dots j_n$ точно $j-1$ инверсии. Следователно

$$(-1)^{[j_1 \cdots j_{i-1}\, j\, j_{i+1} \cdots j_n]} = (-1)^{[j_1 \cdots j_{i-1} j_{i+1} \cdots j_n] + (i-1) + (j-1)}$$

В такъв случай вземайки предвид, че $(-1)^{i+j-2} = (-1)^{i+j}$, то

$$\begin{aligned} A_{ij} &= (-1)^{i+j} \sum (-1)^{[j_1 \cdots j_{i-1} j_{i+1} \cdots j_n]} a_{1,j_1} \dots a_{i-1,j_{i-1}} a_{i+1,j_{i+1}} \dots a_{n,j_n} \\ &= (-1)^{i+j}\Delta_{ij}. \end{aligned}$$

Следствие 2.4.4 *За всяка детерминанта* Δ *е в сила равенството*

$$\Delta = (-1)^{i+1}a_{i1}\Delta_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n}a_{in}\Delta_{in}.$$

Пример 2.4.2 Да пресметнем адюнгираните количества на елементите от третия стълб на детерминантата

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

Съгласно предната теорема

$$A_{13} = (-1)^{1+2}\Delta_{13} = -\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\Delta_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\Delta_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3;$$

Следователно

$$\Delta = 3A_{13} + 6A_{23} + 9A_{33} = 3(-3) + 6.6 + 9.(-3) = 0.$$

Дефиниция 2.4.5 ***Клетъчно-триъгълна*** *наричаме матрица* $\boldsymbol{B}$*, елементите на която могат да се групират в* k^2 ***клетки*** *- матрици с подходящи размери разположени в* k *реда и* k *стълба, така че всички клетки над (под) главния диагонал да са нулеви, т.е.*

$$\boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{O} & \dots & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} & \dots & \boldsymbol{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{k1} & \boldsymbol{B}_{k2} & \dots & \boldsymbol{B}_{kk} \end{vmatrix}$$

Клетките от един ред (стълб) на $\boldsymbol{B}$ *са матрици с един и същ брой редове (стълбове).*

Лема 2.4.6 (за детерминанта с нулев ъгъл) *Нека* $\boldsymbol{D}$ *е* 2×2 *триъгълна матрица, чиито диагонални клетки* $\boldsymbol{A}$ *и* $\boldsymbol{B}$ *са квадратни матрици. Тогава*

$$\det \boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \det \boldsymbol{A} \cdot \det \boldsymbol{B}.$$

Доказателство. Нека $\mathbf{A} = (a_{ij})$ е $n \times n$, а $\mathbf{B} = (b_{ij})$ е $m \times m$ матрица, т.е.

$$\Delta = \det \mathbf{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} & b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

Доказателството ще извършим индуктивно по реда n на $\mathbf{A}$. При $n = 1$ развивайки Δ по първия ред получаваме

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{11} & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ c_{21} & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{vmatrix},$$

т.е. $\Delta = a_{11}.|\mathbf{B}|$, което показва, че твърдението е вярно.

Предполагаме, че твърдението е вярно за всички матрици $\mathbf{D}$, при които $\mathbf{A}$ е от ред $n-1$. Ще извлечем оттук верността на твърдението за n. За целта да означим с D_{1j} адюнгираните количества и с Δ_{1j} поддетерминантите на елементите от първия ред на Δ, а с A_{ij} и α_{ij} съответно адюнгираните количества и поддетерминанти на $\det \mathbf{A}$. Развивайки Δ по първия ред получаваме

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11}D_{11} + a_{12}D_{12} + \cdots + a_{1n}D_{1n} + 0.D_{1\,n+1} + \cdots + 0.D_{1\,n+m} \\ &= a_{11}\Delta_{11} - a_{12}\Delta_{12} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}\Delta_{1n} \end{aligned}$$

Тъй като Δ_{ij} са също клетъчно триъгълни детерминанти, но с ред на клетката в горния ляв ъгъл $n-1$, то индукционното предположение ни дава

$$\Delta_{1j} = \begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2\,j-1} & a_{2\,j+1} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & \dots & a_{3\,j-1} & a_{3\,j+1} & \dots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{m\,j-1} & a_{m\,j+1}, & \dots & a_{m\,m} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{vmatrix}$$
$$= \alpha_{1j}|\mathbf{B}|.$$

Следователно

$$\begin{aligned} \Delta &= (a_{11}\alpha_{11} - a_{12}\alpha_{12} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}\alpha_{1n})|\mathbf{B}| \\ &= (a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n})|\mathbf{B}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \end{aligned}$$

С това лемата е доказана.

Следствие 2.4.7 *Нека е дадена квадратната клетъчно-триъгълна матрица*

$$\boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{O} & \dots & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} & \dots & \boldsymbol{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{k1} & \boldsymbol{B}_{k2} & \dots & \boldsymbol{B}_{kk} \end{vmatrix}$$

където диагоналните клетки $\boldsymbol{B}_{11}, \boldsymbol{B}_{22}, \dots . \boldsymbol{B}_{kk}$ са квадратни матрици, над (под) които има само нулеви клетки. Тогава

$$\det \boldsymbol{B} = \det \boldsymbol{B}_{11} \cdot \det \boldsymbol{B}_{22} \cdot \ldots \cdot \det \boldsymbol{B}_{kk}.$$

Доказателството се извършва с индукция по броя k на диагоналните клетките. База за индукцията, т.е. $k = 2$ се осигурява от лемата.

Пример 2.4.3 Ще приложим лемата и следствието от нея за пресмятане на следната детерминанта

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 9 & 9 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & -1 & 5 & 4 & 1 & 2 \\ -5 & 6 & -7 & 8 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot (-2) = -4.$$

2.5 Системи линейни уравнения. Формули на Крамер.

Дефиниция 2.5.1 ***Система от*** m ***линейни уравнения с*** n ***неизвестни*** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *наричаме съвкупността от равенства от вида*

$$\left| \begin{array}{lllll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\ldots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\ldots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{array} \right. \tag{2.5.1}$$

Свързаните с тях $m \times n$ *матрица* $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ *и стълб* $\mathbf{b}$*:*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

наричаме съответно ***матрица*** *и* ***стълб от свободните членове*** *на системата.*

Дефиниция 2.5.2 ***Решение на системата*** *(2.5.1) се нарича всяка n-орка* $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$*, такава че при заместване на* $x_1 = c_1,\ x_2 = c_2,\ \ldots,\ x_n = c_n$ *всяко от уравненията се превръща в тъждество.*

В този параграф ще разглеждаме само линейни системи, за които броят на уравненията е равен на броя на неизвестните, т.е. системи с квадратни матрици. Ако $\mathbf{A} = (a_{ij})$ е матрицата на една такава линейна система, то детерминантата ѝ $\Delta = \det \mathbf{A}$ се нарича ***детерминанта на тази система***.

Лема 2.5.3 *За всяка детерминанта* $\Delta = \det(a_{ij})_{n\times n}$ *е в сила*

$$\begin{aligned} a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} &= \begin{cases} 0, & \text{при } i \neq j \\ \Delta, & \text{при } i = j \end{cases} \\ a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} &= \begin{cases} 0, & \text{при } i \neq j \\ \Delta, & \text{при } i = j \end{cases} \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

Доказателство. Формулираните твърдения представляват непосредствени следствия от изведените в предния параграф свойства на адюнгираните количества. Наистина равенството

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \Delta$$

представлява развитието на Δ по адюнгираните количества на i-тия ред, а изразът

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj}$$

при $i \neq j$ е развитието по адюнгираните количества на j-тия ред на детерминанта, чиито j-ти ред съвпада с i-тия. Но детерминанта с два равни реда е нула, откъдето следва и твърдението. Тъй като съгласно свойствата на детерминантите при транспониране детерминантите не се променят, то в сила е и съответното твърдение за стълбовете, т.е. второто равенство в (2.5.2).

Нека разгледаме системата от n уравнения с n неизвестни

$$\left| \begin{array}{lllll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & =b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2n}x_n & =b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +\dots & +a_{nn}x_n & =b_n \end{array} \right. \tag{2.5.3}$$

и да означим с Δ детерминантата ѝ, а с Δ_k, $k = 1, 2, \dots, n$, следните детерминанти

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

които се различават от Δ само по това, че k-тия ѝ стълб е заменен със стълба от свободни членове на (2.5.3).

Теорема 2.5.4 (Формули на Крамер) *Ако детерминантата Δ на системата (2.5.3) е ненулева, то системата има и то единствено решение, което се дава с формулите*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

*(наричани **формули на Крамер**)*

Доказателство. *Съществуване.* Ще покажем, че формулите на Крамер наистина задават решение на системата (2.5.3). Замествайки в системата, за лявата страна на k-тото ѝ уравнение,

$1 \leq k \leq n$, след развиване на Δ_j, $j = 1, \ldots, n$, по j-тия стълб получаваме

$$a_{k1}\frac{\Delta_1}{\Delta}+a_{k2}\frac{\Delta_2}{\Delta}+\cdots+a_{kn}\frac{\Delta_n}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}(a_{k1}\Delta_1+a_{k2}\Delta_2+\cdots+a_{kn}\Delta_n) =$$

$$\begin{array}{rll} \frac{1}{\Delta}[& a_{k1}(b_1A_{11}+b_2A_{21}+\cdots+b_kA_{k1}+\cdots+b_nA_{n1}) & +\cdots+ \\ & a_{kj}(b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_kA_{kj}+\cdots+b_nA_{nj}) & +\cdots+ \\ & a_{kn}(b_1A_{1n}+b_2A_{2n}+\cdots+b_kA_{kn}+\cdots+b_nA_{nn}) &] = \end{array}$$

$$\begin{array}{rll} \frac{1}{\Delta}[& b_1(a_{k1}A_{11}+\cdots+a_{kj}A_{1j}kA_{k1}+\cdots+a_{kn}A_{1n}) & +\cdots+ \\ & b_k(a_{k1}A_{k1}+\cdots+a_{kj}A_{kj}+\cdots+a_{kn}A_{kn}) & +\cdots+ \\ & b_n(a_{k1}A_{n1}+\cdots+a_{kj}A_{nj}+\cdots+a_{kn}A_{nn}) &] = \end{array}$$

$$= \frac{1}{\Delta}[b_1.0+\cdots+b_k.\Delta+\cdots+b_n.0] = b_k,$$

като предпоследното равенство се получава от (2.5.2).

Съществуване. Нека $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ е произволно решение на (2.5.3), т.е. в сила е

$$\left| \begin{array}{lllll} a_{11}\alpha_1 & +a_{12}\alpha_2 & +\ldots & +a_{1n}\alpha_n & = b_1 \\ a_{21}\alpha_1 & +a_{22}\alpha_2 & +\ldots & +a_{2n}\alpha_n & = b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}\alpha_1 & +a_{n2}\alpha_2 & +\ldots & +a_{nn}\alpha_n & = b_n \end{array} \right.$$

Умножавайки двете страни на първото равенство с A_{1k}, на второто - с A_{2k}, и т.н., на последното равенство - с A_{nk} събирайки ги, за всяко $k = 1, 2, \ldots, n$ получаваме:

$$\begin{array}{ll} \alpha_1(a_{11}A_{1k}+a_{21}A_{2k}+\cdots+a_{n1}A_{nk}) & +\cdots+ \\ \alpha_k(a_{1k}A_{1k}+a_{2k}A_{2k}+\cdots+a_{nk}A_{nk}) & +\cdots+ \\ \alpha_n(a_{1n}A_{1k}+a_{2n}A_{2k}+\cdots+a_{nn}A_{nk}) & = \\ b_1A_{1k}+b_2A_{2k}+\cdots+b_nA_{nk} = \Delta_k, & \end{array}$$

откъдето съгласно Лема 2.5.2 и въведените означения следва

$$\alpha_1.0+\alpha_2.0+\cdots+\alpha_k.\Delta+\cdots+\alpha_k.0 = \Delta_k,$$

т.е.

$$\alpha_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

С това единствеността е доказана.

Дефиниция 2.5.5 *Система линейни уравнения, всички свободни членове на която са нули, т.е. $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$, се нарича* ***хомогенна система*** *линейни уравнения.*

Ясно е, че хомогенните системи винаги имат решение: такова решение е нулевата n-орка $(0, 0, \dots, 0)$. В такъв случай, съгласно доказаната току що теорема, една хомогенна система с квадратна матрица има ненулево решение (т.е. повече от едно решение) само тогава, когато нейната детерминанта е нулева. И така получихме следното

Следствие 2.5.6 *Ако една хомогенна система от n уравнения с n неизвестни има ненулево решение, то нейната детерминанта е равна на нула.*

Пример 2.5.1 Нека е дадена системата:

$$\left| \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & & & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array} \right.$$

Изчисляваме детерминантата на системата

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

Тъй като детерминантата на системата $\Delta \neq 0$, то системата има единствено решение, което се дава с формулите на Крамер. За целта намираме

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -8.$$

Следователно

$$x_1 = \frac{4}{4} = 1, \qquad x_2 = \frac{4}{4} = 1, \qquad x_3 = \frac{-8}{4} = -2.$$

Проверката показва, че това наистина са решения на системата.

2.6 Умножение на детерминанти. Обратна матрица.

Теорема 2.6.1 *Ако* $\boldsymbol{A}$ *и* $\boldsymbol{B}$ *са квадратни матрици от ред* n, *то*

$$\det(\boldsymbol{AB}) = \det \boldsymbol{A} \cdot \det \boldsymbol{B}.$$

Доказателство. Да разгледаме детерминантата Δ от ред $2n$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

Съгласно лемата за детерминантата с нулев ъгъл $\Delta = |\mathbf{A}|.|\mathbf{B}|$. От друга страна, извършвайки преобразувания върху Δ, които не я променят ще покажем, че $\Delta = |\mathbf{C}|$, където $\mathbf{C} = (c_{ij}) = \mathbf{AB}$. За целта да умножим $n+1$-я ред на Δ с a_{i1}, $n+2$-я ред с a_{i2} и т.н. $2n$-тия ред с a_{in} и да ги прибавим към i-тия ред на Δ. След тази операция, която не променя стойността Δ първите n елемента на i-тия ред се анулират, а $n+j$-тия ред, $j = 1, 2, \dots, n$, е равен на

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj},$$

т.е. точно елемента c_{ij}.
Тази операция извършваме за всяко $i = 1, 2, \dots, n$ и получаваме, че

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{C} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{O} \\ \mathbf{B} & -\mathbf{E} \end{vmatrix} = (-1)^n |\mathbf{C}|.|-\mathbf{E}| = (-1)^{2n}|\mathbf{C}| = |\mathbf{C}|.$$

В горните равенства знакът $(-1)^n$ се появява в резултат на това, че можем да разменим местата на първите n и вторите n стълба като извършим n транспозиции: първи и $(n+1)$-ви стълб, втори и $(n+2)$-ри стълб, и т.н., т.е. да сменим n пъти знака на детерминантата.

Теоремата показва, че произведението на две детерминанти от ред n може да се представи като детерминанта също от ред n. Като вземем предвид, че транспонирането не променя детерминантата заключаваме, че **детерминантите може да се умножават и ред по ред, стълб по стълб, и стълб по ред**.

Дефиниция 2.6.2 *Нека $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ е квадратна матрица от ред n.* ***Адюнгирана матрица (адюнгирана детерминанта**, когато става дума за детерминанти) наричаме следната матрица*

$$\widehat{\boldsymbol{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

където A_{ij}, $i, j = 1, 2, \dots, n$, е адюнгираното количество на елемента a_{ij} в $\det A$.

Теорема 2.6.3 *За адюнгираната детерминанта е в сила* $\det \widehat{\boldsymbol{A}} = (\det \boldsymbol{A})^{n-1}$

Доказателство. Нека първо разгледаме случая $\det \widehat{\mathbf{A}} \neq 0$. Тогава

$$|\mathbf{A}|.|\widehat{\mathbf{A}}| = |\mathbf{A}|.|(\widehat{\mathbf{A}})^{\tau}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

От формулите (2.5.2) и предната теорема следва, че

$$|\mathbf{A}|.|\widehat{\mathbf{A}}| = \begin{vmatrix} |\mathbf{A}| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |\mathbf{A}| & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & |\mathbf{A}| \end{vmatrix} = (\det \mathbf{A})^n.$$

От $|\mathbf{A}| \neq 0$ следва $|\widehat{\mathbf{A}}| = |\mathbf{A}|^{n-1}$.

Нека сега $\det A = 0$. Ще покажем, че $\det \widehat{\mathbf{A}} = 0$.

Ако всички елементи на $\mathbf{A}$ са нулеви, то и всички $A_{ij} = 0$, т.е. $\det \widehat{\mathbf{A}} = 0$. Нека съществува поне един елемент $a_{ks} \neq 0$. Тогава формулите (2.5.2) следва

$$\left|\begin{array}{lllllll}
a_{k1}A_{11} & +a_{k2}A_{12} & +\dots & +a_{ks}A_{1s} & +\dots & +a_{kn}A_{1n} & =0\\
a_{k1}A_{21} & +a_{k2}A_{22} & +\dots & +a_{ks}A_{2s} & +\dots & +a_{kn}A_{2n} & =0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
a_{k1}A_{k1} & +a_{k2}A_{k2} & +\dots & +a_{ks}A_{ks} & +\dots & +a_{kn}A_{kn} & =|\mathbf{A}|=0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
a_{k1}A_{11} & +a_{k2}A_{n2} & +\dots & +a_{ks}A_{ns} & +\dots & +a_{kn}A_{nn} & =0
\end{array}\right.$$

Горните равенства можем да разглеждаме като хомогенна система от n линейни уравнения с n неизвестни, която има ненулево решение $(a_{k1}, \dots, a_{ks}, \dots, a_{kn})$. Следователно детерминантата ѝ, която е точно $\det \widehat{\mathbf{A}}$ е нула.

Дефиниция 2.6.4 *Една квадратна матрица $\boldsymbol{A} \in M_n$ се нарича* ***обратима****, ако съществува матрица $\boldsymbol{X} \in M_n$, така че да е в сила*

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{E}.$$

Дефиниция 2.6.5 *Квадратна матрица $\boldsymbol{A}$ се нарича* ***неособена****, ако* $\det \boldsymbol{A} \neq 0$ *и особена в противния случай* ($\det \boldsymbol{A} = 0$)*.*

Теорема 2.6.6 *Матрицата $\boldsymbol{A}$ е обратима тогава и само тогава, когато е неособена.*

Доказателство. Нека $\mathbf{A}$ е обратима матрица, т.е. съществува матрица $\mathbf{X} \in M_n$, такава че $\mathbf{AX} = \mathbf{E}$. Правилото за умножение на детерминанти (Теорема 2.6.1) ни дава $|\mathbf{A}|\,|\mathbf{X}| = |\mathbf{E}| = 1$. Следователно $|\mathbf{A}| \neq 0$, т.е. $\mathbf{A}$ е неособена.
Обратно, нека $\mathbf{A}$ е неособена матрица. Ще покажем, че тя е обратима. За целта разглеждаме матрицата

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}(\widehat{\mathbf{A}})^{\tau} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn}\end{pmatrix}.$$

Тогава за произведението $\mathbf{AA}^{-1}$ е изпълнено

$$\mathbf{AA}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}\begin{pmatrix} |\mathbf{A}| & 0 & \dots & 0\\ 0 & |\mathbf{A}| & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & |\mathbf{A}|\end{pmatrix} = \mathbf{E}$$

Аналогично се вижда, че $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$.

Твърдение 2.6.7 *Матрицата $\boldsymbol{A}^{-1}$ е единствената матрица, която е решение на матричните уравнения $\boldsymbol{YA} = \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{E}$.*

Доказателство. Както видяхме по-горе съществуването на решение на $\mathbf{YA} = \mathbf{AX} = \mathbf{E}$ влече $\det \mathbf{A} \neq 0$ и следователно съществуването на $\mathbf{A}^{-1}$. Умножавайки отляво с $\mathbf{A}^{-1}$ равенството $\mathbf{AX} = \mathbf{E}$ получаваме

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{E} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{EX} = \mathbf{A}^{-1} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}.$$

Аналогично се показва, че $\mathbf{A}^{-1}$ е единственото решение на $\mathbf{YA} = \mathbf{E}$.

Матрицата $\mathbf{A}^{-1}$ се нарича ***обратна*** на $\mathbf{A}$.

Пример 2.6.1 Да намерим обратната матрица на

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Съгласно доказаното по-горе

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}(\widehat{\mathbf{A}})^{\tau} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -5 \\ -4 & 2 & -4 \end{pmatrix}^{\tau} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 6 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

Теорема на Хамилтон - Кейли.

Дефиниция 2.6.8 *Под **характеристичен полином** на квадратната матрица $\boldsymbol{A}$ от ред n разбираме полинома*

$$f_A(x) = \det(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - x \end{vmatrix}$$

Характеристичният полином $f_A(x)$ е полином от n-та степен. Тъй като n-тата и $(n-1)$-та степен се съдържат единствено в произведението

$$(a_{11}-x)(a_{22}-x)\cdots(a_{nn}-x)$$

от развитието на детерминантата $\det(\mathbf{A}-x\mathbf{E})$ и $f(0)=\det\mathbf{A}$, то

$$f_A(x)=(-1)^n x^n + f_1 x^{n-1} + \cdots + f_{n-1}x + \det\mathbf{A},$$

където $(-1)^{n-1}f_1 = a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn} = \operatorname{Tr}\mathbf{A}$ и се нарича ***следа на матрицата*** $\mathbf{A}$.

Теорема 2.6.9 (Хамилтън-Кейли) *Всяка матрица е корен на своя характеристичен полином.*

Доказателство. Да разгледаме матрицата $\mathbf{A}-x\mathbf{E}$, чията детерминанта е точно характеристичния полином $f_A(x) = f_n + f_{n-1}x + \cdots + f_0 x^n$ на $\mathbf{A}$. Напомняме, че $f_0=(-1)^n$ и $f_n=|\mathbf{A}|$.

Да означим с $A_{ij}(x)$ адюнгираното количество на елемента с индекси i,j в $|\mathbf{A}-x\mathbf{E}|$. $A_{ij}(x)$ е полином от степен най-много $n-1$ и следователно адюнгираната матрица на $\mathbf{A}-x\mathbf{E}$ може да се запише във вида

$$(\widehat{\mathbf{A}-x\mathbf{E}}) = \mathbf{A}_{n-1} + \mathbf{A}_{n-2}x + \cdots + \mathbf{A}_0 x^{n-1}.$$

Тъй като

$$(\mathbf{A}-x\mathbf{E})(\widehat{\mathbf{A}-x\mathbf{E}}) = f_A(x)\mathbf{E} = f_n\mathbf{E} + f_{n-1}\mathbf{E}x + \cdots + f_0\mathbf{E}x^n$$

и

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}-x\mathbf{E})(\mathbf{A}_{n-1} + \mathbf{A}_{n-2}x + \cdots + \mathbf{A}_0 x^{n-1}) &= \mathbf{A}\mathbf{A}_{n-1} + (\mathbf{A}\mathbf{A}_{n-2} - \mathbf{A}_{n-1})x \\ &+ \cdots + (\mathbf{A}\mathbf{A}_{n-k-1} - \mathbf{A}_{n-k})x^k + \cdots + (\mathbf{A}\mathbf{A}_0 - \mathbf{A}_1)x^{n-1} - \mathbf{A}_0 x^n\end{aligned}$$

приравнявайки коефициентите (те са матрици) пред съответните степени на x получаваме

$$\begin{array}{rcl}\mathbf{A}\mathbf{A}_{n-1} &=& f_n\mathbf{E} \\ \mathbf{A}\mathbf{A}_{n-2} - \mathbf{A}_{n-1} &=& f_{n-1}\mathbf{E} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}\mathbf{A}_0 - \mathbf{A}_1 &=& f_1\mathbf{E} \\ -\mathbf{A}_0 &=& f_0\mathbf{E}\end{array}$$

Умножавайки отляво горните равенства съответно с $\mathbf{E}$, $\mathbf{A}$, ..., $\mathbf{A}^n$ и събирайки ги получаваме

$$\mathbf{O} = f_n\mathbf{E} + f_{n-1}\mathbf{A} + \cdots + f_1\mathbf{A}^{n-1} + f_0\mathbf{A}^n = f_A(\mathbf{A}).$$

Забележка 2.6.1 *Под произведение на матрица $\boldsymbol{B}$ с x^k разбираме матрицата получена чрез умножаване на всички елементи на $\boldsymbol{B}$ с x^k (както при умножение с число). В такъв случай полином на x с коефициенти матрици $\boldsymbol{B}_k$ ще предсталява матрица, чиито елементи са полиноми на x. Съвпадението на два полинома с матрични коефициенти $\boldsymbol{F}(x) = (f_{ij}(x)) = \sum \boldsymbol{F}_k x^k$ и $\boldsymbol{G}(x) = (g_{ij}(x)) = \sum \boldsymbol{G}_k x^k$ е еквивалентно на n^2 равенства между полиномите f_{ij} и g_{ij}, които са с числови коефициенти и следователно пред еднаквите степени на x ще има равни числови коефициенти. Последното означава, че съответните елементи на $\boldsymbol{F}_k$ и $\boldsymbol{G}_k$ съвпадат, т.е. $\boldsymbol{F}_k$ и $\boldsymbol{G}_k$ съвпадат.*