Глава 3

Линейни пространства

3.1 Пространство на свободните вектори.

3.1.1 Насочени отсечки и свободни вектори

Дефиниция 3.1.1 ***Насочена отсечка*** *наричаме отсечка, на която единият край е определен за първи (**начало** на насочената отсечка), а другият за втори (**край** на насочената отсечка).*

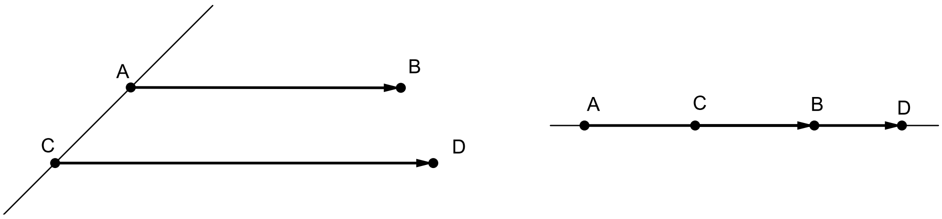
Насочена отсечка с начало A и край B бележим с $\overrightarrow{AB}$. Геометрично на чертежи насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$ ще бележим със стрелка, излизаща от A и свършваща в B. Насочена отсечка, чиито начало и край съвпадат, наричаме ***нулева*** насочена отсечка.

Дефиниция 3.1.2 *Две насочени отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ наричаме **колинеарни** и бележим с $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, ако правите AB и CD и са успоредни или съвпадат.*

Две колинеарни насочени отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ наричаме ***еднопосочни*** (***еднопосочно колинеарни***), когато точките B и D лежат в една полуравнина относно правата AC в случая на успоредни прави AB и CD и когато посоките от A към B и от C към D съвпадат при сливащи се прави AB и CD (фиг. 3.1).

Аналогично дефинираме ***разнопосочни*** (***разпопосочно колинеарни***) насочени отсечки: когато точките B и D са в различни полуравнини или съответно при сливащи се прави посоките са противоположни.

Под дължина на насочената отсека $\overrightarrow{AB}$ разбираме дължината $|AB|$ на отсечката AB. Дължината на нулевата отсечка е нула.



Фигура 3.1: Примери на еднопосочни насочени отсечки.

Дефиниция 3.1.3 *Казваме, че насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ са* ***равни****, ако са еднопосочно колинеарни и са с равни дължини.*

Така дадената дефиниция означава, че две насочени отсечки са равни, когато могат да бъдат получени една от друга с успоредно пренасяне (транслация).

Равенството между насочени отсечки удовлетворява обичайните за равенство свойства (аксиомите за *релация на еквивалентност*):

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$ (*рефлективност*);
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ влече $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ (*симетричност*);
- от $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$ следва $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$ (*транзитивност*).

Верността на горните твърдения следва непосредствено от дефиницията на равни насочени отсечки.

Дефиниция 3.1.4 ***Свободен вектор*** *с представител $\overrightarrow{AB}$ наричаме съвкупността от всички равни на $\overrightarrow{AB}$ насочени отсечки.*

Свободните вектори ще бележим най-често с малки букви $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\dots$ и фактът, че свободният вектор $\boldsymbol{a}$ има за представител насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$ означаваме с $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$. Съгласно отбелязаните по-горе свойства на равенството между насочени отсечки следва, че за представител на свободния вектор може да бъде взета коя да е от равните му насочени отсечки.

Нулевите насочени отсечки задават ***нулевия*** свободен вектор, а ***противоположен*** вектор на вектора $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$ наричаме свободния вектор с представител $\overrightarrow{BA}$ и го бележим с $-\boldsymbol{a} = \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

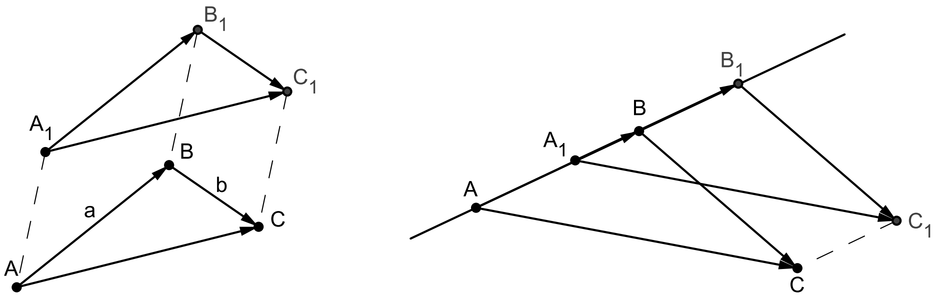
Дефиниция 3.1.5 *Два свободни вектора наричаме колинеарни, ако имат* ***колинеарни*** *(еднопосочни или разнопосочни) представители.*

Понякога ще използваме думата вектор вместо понятията свободен вектор и насочена отсечка имайки предвид, че от контекста е ясно за какво точно става дума.

3.1.2 Действия със свободни вектори.

Дефиниция 3.1.6 ***Сума*** $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ *на свободните вектори* $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$ *и* $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BC}$ *наричаме свободния вектор* $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ *с представител* $\overrightarrow{AC}$.

Така дефинираната сума на вектори формално зависи от началната точка A, от която нанасяме представителите на $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Затова възниква въпросът за коректност на дефиницията, т.е. ако вземем $\overrightarrow{A_1B_1}=\boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{B_1C_1}=\boldsymbol{b}$ дали $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1C_1}$ (фиг. 3.2).



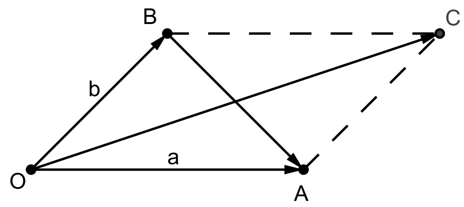
Фигура 3.2: Коректност на дефиницията на сума

Тъй като ABB_1A_1 е успоредник съгласно дефиницията на равни насочени отсечки, то $AA_1 \parallel BB_1$ и $|AA_1|=|BB_1|$ (последното остава в сила и когато правите AB и A_1B_1 се сливат). Аналогично $BB_1 \parallel CC_1$ и $|BB_1|=|CC_1|$. Следователно, $AA_1 \parallel CC_1$ и $|AA_1|=|CC_1|$, т.е. AA_1C_1C е успоредник. Тогава отсечките AC и A_1C_1 са успоредни и равни и както лесно се вижда на чертежа точките C и C_1 лежат в едната полуравнина относно правата AA_1. Следователно, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1C_1}$ (случаят когато $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ са колинеарни оставяме на читателя).

Даденото по-горе правило за намиране представител на сумата $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ се нарича *правило на триъгълника*. Еквивалентно на него е и т.н. *правило на успоредника*, при което представителите на $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ се вземат с общо начало $\boldsymbol{a}=OA$ и $\boldsymbol{b}=OB$. Векторът $\boldsymbol{c}=OC$ се определя като диагонал на успоредника $OACB$ (фиг. 3.3).

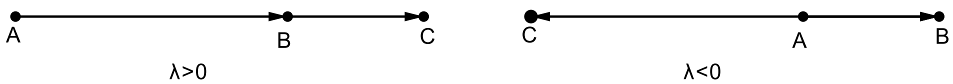
Дефиниция 3.1.7 *Под* ***разлика*** $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ *на векторите* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *разбираме вектора* $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

Дефинициите на сума и противоположен вектор ни дават, че разликата $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ е единственото решение на уравнението $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$. Геометрично разликата $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ се представя с диагонала BA на успоредника $OACB$ (фиг. 3.2).



Фигура 3.3: Разлика на свободни вектори

Дефиниция 3.1.8 ***Произведение на вектора*** $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$ *с реалното число* λ *наричаме свободния вектор* $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AC}$ *с дължина* $|\overrightarrow{AC}| = |\lambda|\,|\overrightarrow{AB}|$ *и еднопосочно колинеарен с* $\boldsymbol{a}$ *при* $\lambda > 0$*, съответно разпопосочно колинеарен с* $\boldsymbol{a}$ *при* $\lambda < 0$ (фиг. 3.4).



Фигура 3.4: Произведение на вектор с число

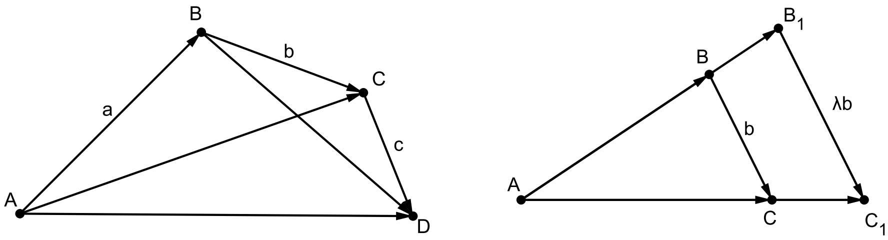
Дефиницията формално зависи от избора на представителя на вектора $\boldsymbol{a}$, затова отново възниква въпросът за коректността ѝ. Тъй като проверката не е сложна я оставяме на читателя.

Твърдение 3.1.9 *Операциите събиране на вектори и умножение на вектор с число притежават следните свойства:*

1. $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$ (*комутативност* на събирането);
2. $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ (*асоциативност* на събирането);
3. $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{a}$;
4. $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{o}$;
5. $(\lambda + \mu)\,\boldsymbol{a} = \lambda\,\boldsymbol{a} + \mu\,\boldsymbol{a}$ (*дистрибутивен закон*);
6. $\lambda\,(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\,\boldsymbol{a} + \lambda\,\boldsymbol{b}$ (*дистрибутивен закон*);
7. $(\lambda\,\mu)\,\boldsymbol{a} = \lambda\,(\mu\,\boldsymbol{a}) = \mu\,(\lambda\,\boldsymbol{a})$;
8. $1\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$;
9. $(-\lambda)\boldsymbol{a} = -(\lambda\boldsymbol{a})$.

Доказателство. Някои от свойствата са очевидни следствия от дефинициите, други се доказват съвсем лесно. За илюстрация ще докажем свойства *2.* и *6.*

Доказателство на 2. Нека $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{CD} = \boldsymbol{c}$. Тогава $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{BD} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ и следователно (фиг. 3.5)
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$ и $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$.



Фигура 3.5: Свойства 2 и 6.

Доказателство на 6. Нека $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{AB_1} = \lambda\,\boldsymbol{a}$ и $\lambda > 0$ (фиг. 3.5). Случаят $\lambda < 0$ е аналогичен. Построяваме права през B_1 успоредна на BC и нека означим с C_1 пресечната ѝ точка с правата AC. Тогава от свойствата на хомотетията следва, че $|B_1C_1| = |\lambda|\,|BC|$ и $|AC_1| = |\lambda|\,|AC|$. Вземайки предвид, че $\lambda > 0$, получаваме $\overrightarrow{B_1C_1} = \lambda\,\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC_1} = \lambda\,\overrightarrow{AC}$, т.е. $\lambda\,\boldsymbol{a} + \lambda\,\boldsymbol{b} = \lambda\,(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$.

3.1.3 Линейна зависимост, компланарност.

Дефиниция 3.1.10 *Векторите $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ наричаме **линейно зависими**, ако съществуват реални числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ поне едно, от които различно от нула, така че*

$$\lambda_1\,\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\,\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_k\,\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{o}. \tag{3.1.1}$$

*В противен случай векторите $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ се наричат **линейно независими**, т.е. от* (3.1.1) *следва, че $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$.*

Непосредствено следствие от дефиницията са следните свойства:

1. *Един свободен вектор $\boldsymbol{a}$ е линейно зависим, тогава и само тогава, когато е нулевият вектор.*
   Наистина, $\lambda\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$ за $\lambda \neq 0$ е изпълнено само при $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$.

2. *Ако една съвкупност от свободни вектори съдържа нулевия вектор, то тя е линейно зависима.*

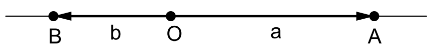
Наистина, ако $\boldsymbol{o}, \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_{k-1}$ е дадената съвкупност от вектори, то за произволно $\lambda \neq 0$ имаме $\lambda\,\boldsymbol{o} + 0\,\boldsymbol{a}_1 + \cdots + 0\,\boldsymbol{a}_{k-1} = \boldsymbol{o}$. Последното показва, че дадената съвкупност от вектори е линейно зависима.

3. *Всяка съвкупност от свободни вектори, която съдържа линейно зависима подсъвкупност, е линейно зависима.*
   Нека $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k$ е линейно зависима подсъвкупност на $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$, където $k \leq n$. Тогава съществуват реални числа $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ поне едно, от които различно от нула, така че $\lambda_1\,\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \lambda_k\,\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{o}$. Полагайки $\lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_n = 0$, получаваме $\lambda_1\,\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \lambda_k\,\boldsymbol{a}_k + \lambda_{k+1}\,\boldsymbol{a}_{k+1} + \cdots + \lambda_n\,\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{o}$, където $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ е ненулева n-торка от реални числа. Съгласно дефиницията, съвкупността от n-те вектора е линейно зависима.

Твърдение 3.1.11 *Два свободни вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ са линейно зависими, тогава и само тогава, когато са колинеарни.*

Доказателство. а) *Необходимост.* Нека $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ са линейно зависими. Тогава съществува ненулева двойка числа λ и μ (нека например $\lambda \neq 0$), така че $\lambda\,\boldsymbol{a} + \mu\,\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$. Последното равенство ни дава $\boldsymbol{a} = -\dfrac{\mu}{\lambda}\,\boldsymbol{b}$, откъдето съгласно дефиницията на произведение на вектор с число следва, че $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ са колинеарни.

б) *Достатъчност.* Нека $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ са колинеарни. Ако някой от векторите $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ е нулевият вектор, то съгласно свойство 2) векторите са линейно зависими. Нека и двата вектора са ненулеви. Да вземем два техни представители $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$ с общо начало O (фиг. 3.6).



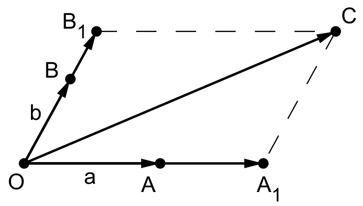
Фигура 3.6:

Съгласно дефиницията на колинеарни вектори $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ лежат на една права. Нека $\lambda = \varepsilon\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}$, където $\varepsilon = +1$, ако $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ са еднопосочни, и $\varepsilon = -1$, ако $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ са разнопосочни. Тогава $\boldsymbol{a}$ и $\lambda\,\boldsymbol{b}$ са еднопосочни и $|\lambda\,\boldsymbol{b}| = |\lambda|\,|\boldsymbol{b}| = \dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}\,|\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|$. Следователно, $\boldsymbol{a} = \lambda\,\boldsymbol{b}$, т.е. $1\,\boldsymbol{a} + (-\lambda)\,\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$, откъдето следва, че $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ са линейно зависими.

Дефиниция 3.1.12 *Три (и повече) вектора наричаме* ***компланарни****, ако лежат в една равнина (т.е. представителите им с общо начало лежат в една равнина).*

Твърдение 3.1.13 *Три свободни вектора* $\boldsymbol{a}$*,* $\boldsymbol{b}$ *и* $\boldsymbol{c}$ *са линейно зависими, тогава и само тогава, когато са компланарни.*

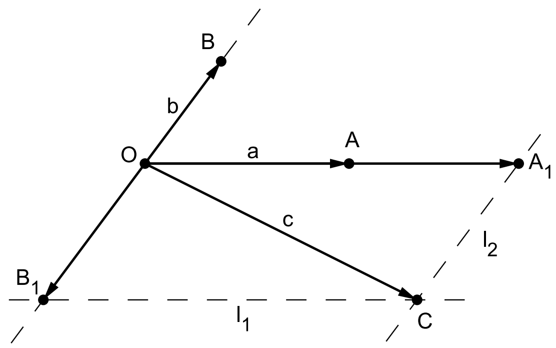
Доказателство. а) *Необходимост.* Нека $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ са линейно зависими, т.е. съществуват числа λ_1, λ_2, λ_3, поне едно от които е различно от нула (нека например $\lambda_3 \neq 0$), така че $\lambda_1\,\boldsymbol{a} + \lambda_2\,\boldsymbol{b} + \lambda_3\,\boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}$. Тогава $\boldsymbol{c} = \mu_1\,\boldsymbol{a} + \mu_2\,\boldsymbol{b}$, където $\mu_1 = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_3}$ и $\mu_2 = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_3}$. Нека $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA_1} = \mu_1\,\boldsymbol{a}$, и $\overrightarrow{OB_1} = \mu_2\,\boldsymbol{b}$ (фиг. 3.7).



Фигура 3.7:

В такъв случай, ако C е пресечната точка на правите през A_1 и B_1 успоредни съответно на OB и OA, то $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ лежат в една равнина и $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} = \mu_1\,\boldsymbol{a} + \mu_2\,\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$. Следователно, векторите $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ са компланарни.

б) *Достатъчност.* Нека $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ са компланарни, т.е. техните представители $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ лежат в една равнина (фиг. 3.8).

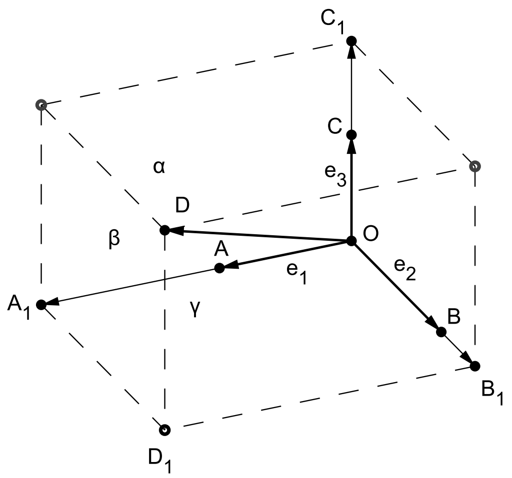


Фигура 3.8:

През точка C построяваме прави $l_1 \parallel OA$ и $l_2 \parallel OB$ и нека $B_1 = l_1 \cap OB$, $A_1 = l_2 \cap OA$. Тогава $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1}$. Тъй като $\overrightarrow{OA_1}$ е колинеарен с $\overrightarrow{OA}$, то съществува μ, такова че $\overrightarrow{OA_1} = \mu\overrightarrow{OA} = \mu\,\boldsymbol{a}$. Аналогично, съществува такова ν, че $\overrightarrow{OB_1} = \nu\,\boldsymbol{b}$. Следователно, $\boldsymbol{c} = \mu\,\boldsymbol{a} + \nu\,\boldsymbol{b}$, т.е. $\mu\,\boldsymbol{a} + \nu\,\boldsymbol{b} + (-1)\,\boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}$, което означава, че векторите $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ са линейно зависими.

Твърдение 3.1.14 *Всеки четири свободни вектора $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{e}_4$ са линейно зависими.*

Доказателство. Ако $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$ са компланарни, то според Твърдение 3.1.13 те са линейно зависими, следователно такива са и четирите вектора. Нека $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$ не са компланарни и $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ са съответно техни представители с общо начало. Нека $\boldsymbol{e}_4 = \overrightarrow{OD}$ и α, β и γ са равнини през D, успоредни съответно на равнините (OAB), (OBC) и (OAC). Означаваме с A_1 прободната точка на OA с β, с B_1 прободната точка на OB с γ и с C_1 - на OC с α (фиг. 3.9).



Фигура 3.9: ...

Пресечницата l на равнините β и γ е успоредна на правата OC и нека пробожда равнината (OAB) в точката D_1. Тъй като β е успоредна на (OBC), то $A_1D_1 \parallel OB$. Аналогично, $B_1D_1 \parallel OA$ и следователно $OA_1D_1B_1$ е успоредник. Тогава, $\overrightarrow{OD_1} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1}$. Аналогично се доказва, че OD_1DC_1 е успоредник и следователно $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OD_1} + \overrightarrow{OC_1}$. Така получаваме, че $\boldsymbol{e}_4 = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} +$

$\overrightarrow{OC_1}$. Но $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB_1}$ и $\overrightarrow{OC_1}$ са колинеарни съответно с $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$, откъдето следва, че съществуват числа λ_1, λ_2 и λ_3, такива, че $\overrightarrow{OA_1} = \lambda_1\boldsymbol{e}_1$, $\overrightarrow{OB_1} = \lambda_2\boldsymbol{e}_2$, $\overrightarrow{OC_1} = \lambda_3\boldsymbol{e}_3$. Окончателно получаваме

$$\boldsymbol{e}_4 = \overrightarrow{OD} = \lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2\boldsymbol{e}_2 + \lambda_3\boldsymbol{e}_3,$$

откъдето следва линейната зависимост на четирите вектора.

3.2 Проекция на вектор върху ос и равнина.

Дефиниция 3.2.1 ***Ос*** *наричаме права, на която са зададени единица мярка за дължина и посока, т.е. едната от двете посоки върху правата е избрана за положителна.*

Ако е зададена една ос l, то съществува точно един *единичен* вектор (т.е. с дължина единица по отношение мярката за дължина определена върху оста) колинеарен с l и с посока съвпадаща с положителната посока на оста. Наистина, ако изберем една точка O върху l и OE е насочената отсечка върху l с дължина единица и положителна посока, то OE определя единствения единичен вектор $\boldsymbol{e}$ колинеарен с оста l и еднопосочен с нея. Обратно, всяка точка O и ненулев вектор $\boldsymbol{e}$ в равнината определят точно една ос, за която $\boldsymbol{e}$ е *единичен положително ориентиран* вектор върху нея. Това е оста, минаваща през O, еднопосочно колинеарна с $\boldsymbol{e}$ и имаща за единична мярка за дължина $\boldsymbol{e}$. Именно тази ос ще разбираме, когато кажем "оста $O\boldsymbol{e}$".

Нека е дадена оста $l = O\boldsymbol{e}$. За всеки свободен вектор $\boldsymbol{a}$ колинеарен с l (всяка насочена отсечка върху l) съществува и то единствено реално число λ, такова, че $\boldsymbol{a} = \lambda\,\boldsymbol{e}$. Това число се нарича *алгебрична мярка* или *координата* на $\boldsymbol{a}$. Самата двойка $O\boldsymbol{e}$ се нарича *координатна система върху правата* l.

Съгласно дефиницията на произведение на вектор с число, дължината на вектора $\boldsymbol{a}$ е равна на $|\lambda|$ (напомняме, че единичният вектор $\boldsymbol{e}$ считаме с дължина единица). Очевидно е, че равните насочени отсечки имат равни алгебрични мярки (координати). Алгебричната мярка на $\overrightarrow{AB}$ ще бележим с $\overline{AB}$.

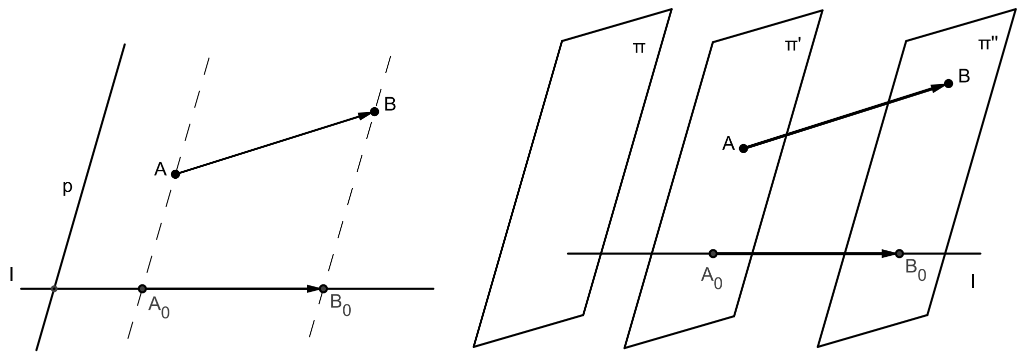
Лема 3.2.2 ***(релация на Шал)****. При всяко разположение на точките A, B и C върху оста $l = O\boldsymbol{e}$ е в сила равенството*

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

Доказателство. Съгласно дефиницията на алгебрична мярка е в сила $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\,\boldsymbol{e}$, $\overrightarrow{BC} = \overline{BC}\,\boldsymbol{e}$ и $\overrightarrow{AC} = \overline{AC}\,\boldsymbol{e}$. От друга страна, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Замествайки в това равенство и използвайки свойствата на векторите, получаваме $(\overline{AB} + \overline{BC})\,\boldsymbol{e} = \overline{AC}\,\boldsymbol{e}$, т.е. $(\overline{AB} + \overline{BC} - \overline{AC})\,\boldsymbol{e} = \boldsymbol{o}$, откъдето следва твърдението.

Нека $l = O\boldsymbol{e}$ е една ос в равнината и p е пресичаща я права.

Дефиниция 3.2.3 ***Проекция на точката*** A ***върху оста*** l ***успоредно на*** *p наричаме пресечната точка A_0 на l с правата през A успоредна на p, а а под* ***проекция на насочената отсечка*** $\overrightarrow{AB}$ *разбираме насочената отсечка* $\overrightarrow{A_0B_0}$.



Фигура 3.10: Проекция върху ос.

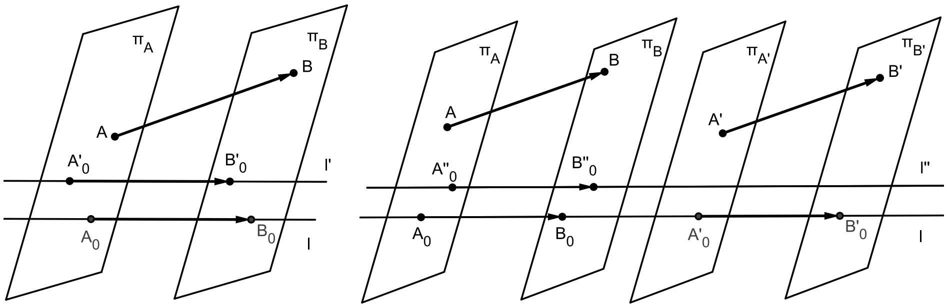
Аналогично се дефинира и понятието проекция върху ос в пространството.

Дефиниция 3.2.4 *Нека $l = O\boldsymbol{e}$ е една ос в пространството, пробождаща равнината π.* ***Проекция на точката*** A ***върху оста*** l ***успоредно на равнината*** *π наричаме прободната точка A_0 на l с равнината π' през A успоредна на π.* ***Проекция на насочената отсечка*** $\overrightarrow{AB}$ *наричаме насочената отсечка* $\overrightarrow{A_0B_0}$.

Много често, за краткост, думите "проекция на $\overrightarrow{AB}$ " ще използваме за алгебричната мярка на $\overrightarrow{A_0B_0}$, като от контекста ще става ясно кое точно имаме предвид.

Твърдение 3.2.5 *Равните насочени отсечки имат равни проекции.*

Доказателство. Първо ще покажем, че проекциите на една насочена отсечка $\overrightarrow{AB}$ върху две успоредни оси l и l' са равни. Нека тези две проекции са съответно $\overrightarrow{A_0B_0}$ и $\overrightarrow{A'_0B'_0}$ (фиг. 3.11 а)). Понеже правите l и l', както и равнините π_A и π_B, минаващи съответно през A и B и упоредни на π, са успоредни помежду си, то $A_0B_0B'_0A'_0$ е успоредник. Следователно $\overrightarrow{A_0B_0} = \overrightarrow{A'_0B'_0}$.



а) б)

Фигура 3.11: Към Твърдение 3.2.5

Нека $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ са две равни насочени отсечки и π_A, π_B, съответно π'_A, π'_B са равнините през A и B, съответно A' и B', успоредни на равнината π, задаваща проектирането. Чрез транслацията изпращаща $\overrightarrow{A'B'}$ в $\overrightarrow{AB}$ равнините π'_A и π'_B отиват съответно в π_A и π_B. Оста l отива в оста l'' успоредна на l. Нека насочената отсечка $\overrightarrow{A''_0B''_0}$ е образът на $\overrightarrow{A'_0B'_0}$ при тази транслация, т.е. $\overrightarrow{A''_0B''_0} = \overrightarrow{A'_0B'_0}$ (фиг. 3.11 б)). Очевидно $\overrightarrow{A''_0B''_0}$ е проекцията на $\overrightarrow{AB}$ върху l''. Съгласно доказаното по-горе $\overrightarrow{A''_0B''_0} = \overrightarrow{A_0B_0}$. Следователно $\overrightarrow{A_0B_0} = \overrightarrow{A'_0B'_0}$. Доказателството на твърдението в в равнинния случай на проектиране успоредно на права е аналогично, дори по-просто.

Доказаното твърдение ни позволява да говорим за проекция на свободен вектор, а именно:

Дефиниция 3.2.6 ***Проекция на свободен вектор а върху оста*** l ***успоредно на равнината*** π ***(правата*** p***)*** *наричаме проекцията на коя да е от представящите го насочени отсечки. Алгебричната мярка на проек-*

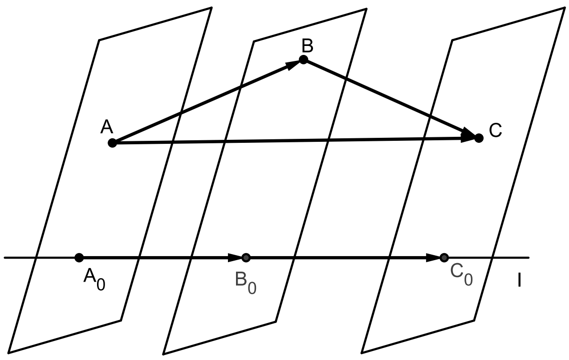
цията на $\boldsymbol{a}$ ще бележим с $\text{пр}_l\boldsymbol{a}$ *или само с* $\text{пр}\boldsymbol{a}$*, ако е ясно върху коя права се проектира.*

Твърдение 3.2.7 *За всеки два свободни вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и всяко число λ е в сила:*

$$\text{пр}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \text{пр}\boldsymbol{a} + \text{пр}\boldsymbol{b};$$

$$\text{пр}(\lambda\,\boldsymbol{a}) = \lambda\,\text{пр}\boldsymbol{a}.$$

Доказателство. Нека $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ са представители на векторите $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ съответно. Тогава $\overrightarrow{AC}$ е представител на $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. Ако A_0, B_0 и C_0 са проекциите на A, B и C, то $\text{пр}\boldsymbol{a} = \overline{A_0B_0}$, $\text{пр}\boldsymbol{b} = \overline{B_0C_0}$ и $\text{пр}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \overline{A_0C_0}$. Съгласно релацията на Шал за точките A_0, B_0 и C_0 върху оста l имаме $\overline{A_0B_0} + \overline{B_0C_0} = \overline{A_0C_0}$, което е точно първото от двете равенства в твърдението (фиг. 3.12).



Фигура 3.12: Към Твърдение 3.2.7

Второто равенство поради простотата на доказателството му оставяме на читателя.

Дефиниция 3.2.8 *Нека α е равнина в пространството и p е пробождаща я права.* ***Проекция на точката*** *A* ***върху*** *α* ***успоредно на правата*** *p наричаме прободната точка A_0 на α с правата през A успоредна на p.* ***Проекция*** *на насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$ наричаме насочената отсечка $\overrightarrow{A_0B_0}$.*

Твърдение 3.2.9 *Равните насочени отсечки имат равни проекции върху равнина.*

Горното свойство на проектирането ни позволява да дефинираме проекция на свободен вектор върху равнина.

Дефиниция 3.2.10 *Под* ***проекция на свободен вектор а върху равнината*** α ***успоредно на правата*** p *разбираме проекцията на коя да е от представящите го насочени отсечки.*

Твърдение 3.2.11 *Проекцията върху равнина на линейна комбинация от вектори е линена комбинация от проекциите им, т.е.*

$$np(\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b}) = \lambda np(\boldsymbol{a}) + \mu np(\boldsymbol{b}).$$

Доказателството на горните две твърдения ги оставяме на читателя за упражнение.

3.3 Линейно пространство. n-мерно векторно пространство.

Дефиниция 3.3.1 *Нека* $\mathbb{F}$ *е числово поле (най-често това е* $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$*) и* $\mathbb{L}$ *непразно множество, в което за всеки два негови елемента* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *еднозначно е определен елемент* $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in \mathbb{L}$*, наречен тяхна сума (т.е. зададена е операция "събиране"), и за всеки елемент* $\boldsymbol{a} \in \mathbb{L}$ *и всяко число* $\lambda \in \mathbb{F}$ *е определен еднозначно елемент* $\lambda\, \boldsymbol{a} \in \mathbb{F}$*, наречен произведение на* $\boldsymbol{a}$ *с числото* λ *(т.е. зададена е операция "умножение с число"). Множеството* $\mathbb{L}$ *с въведените в него операции събиране и умножение с число се нарича* ***линейно пространство над числовото поле*** $\mathbb{F}$*, ако са в сила следните свойства (аксиоми за линейно пространство):*

1. $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$;
2. $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$;
3. *съществува елемент* $\boldsymbol{o} \in \mathbb{L}$*, наречен* ***нулев****, така че* $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{a}$ *за всяко* $\boldsymbol{a} \in \mathbb{L}$;
4. *за всяко* $\boldsymbol{a} \in \mathbb{L}$ *съществува елемент* $-\boldsymbol{a} \in \mathbb{L}$*, наречен* ***противоположен на а****, за който* $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{o}$;
5. $(\lambda + \mu)\, \boldsymbol{a} = \lambda\, \boldsymbol{a} + \mu\, \boldsymbol{a}$;
6. $\lambda\, (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\, \boldsymbol{a} + \lambda\, \boldsymbol{b}$;
7. $\lambda\, (\mu\, \boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\, \boldsymbol{a} = \mu(\lambda\, \boldsymbol{a})$;
8. $1\, \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$.

Елементите на $\mathbb{L}$ обикновено се наричат *вектори*, а числата от $\mathbb{F}$ - *скалари.*

Поради асоциативния закон (аксиома 2), можем да изпускаме скобите при събиране на вектори, пишейки $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, и да говорим за сума на произволен краен брой вектори.

Непосредствено от аксиомите следват следните свойства.

Свойство 3.3.1 *Единственост на нулевия елемент. (Нулевият елемент е единствен).*

> ***Доказателство.*** Нека $\boldsymbol{o}_1 \in \mathbb{L}$ е произволен вектор със свойството $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{o}_1=\boldsymbol{a}$ за всяко $\boldsymbol{a}\in\mathbb{L}$. Тогава $\boldsymbol{o}=\boldsymbol{o}+\boldsymbol{o}_1=\boldsymbol{o}_1+\boldsymbol{o}=\boldsymbol{o}_1$.

Свойство 3.3.2 *Единственост на противоположния елемент.*

> ***Доказателство.*** Нека $\boldsymbol{a}$ е произволен вектор от $\mathbb{L}$ и $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ са два елемента от $\mathbb{L}$ със свойството $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{o}$ и $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{o}$. Тогава $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{o}=\boldsymbol{a}_1+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}_2)=(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{o}+\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}_2$.

Свойство 3.3.3 *За всеки вектор* $\boldsymbol{a}\in\mathbb{L}$ *е в сила* $0\,\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}$.

> ***Доказателство.*** $\boldsymbol{a}+0\,\boldsymbol{a}=1\,\boldsymbol{a}+0\,\boldsymbol{a}=(1+0)\,\boldsymbol{a}=1\,\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$, откъдето, използвайки единствеността на нулевия елемент, следва твърдението.

Свойство 3.3.4 *За всяко* $\lambda\in\mathbb{F}$ *е в сила* $\lambda\,\boldsymbol{o}=\boldsymbol{o}$.

> ***Доказателство.*** $\lambda\,\boldsymbol{o}=\lambda\,(0\,\boldsymbol{a})=(\lambda\,0)\,\boldsymbol{a}=0\,\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}$.

Свойство 3.3.5 *За всяко* $\lambda\in\mathbb{F}$ *и* $\boldsymbol{a}\in\mathbb{L}$ *е в сила* $(-\lambda)\,\boldsymbol{a}=-(\lambda\,\boldsymbol{a})$.

> ***Доказателство.*** $\lambda\,\boldsymbol{a}+(-\lambda)\,\boldsymbol{a}=(\lambda+-\lambda)\,\boldsymbol{a}=0\,\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$. От единствеността на противоположния елемент следва, че $(-\lambda)\,\boldsymbol{a}=-\lambda\,\boldsymbol{a}$.

Дефиниция 3.3.2 ***Разлика*** $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ *на векторите* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *наричаме сумата* $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

Свойство 3.3.6 *За всяко* $\boldsymbol{a}\in\mathbb{L}$ *и* $\boldsymbol{b}\in\mathbb{L}$ *уравнението* $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ *има единствено решение и то е* $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.

Доказателство. $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}+[\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})] = [\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})]+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$, което показва, че $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ е решение на уравнението. От друга страна, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{y}\in\mathbb{L}$ влече $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, т.е. $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.

Примери за линейни пространства:

1. Полето на комплексните числа $\mathbb{C}$ относно събирането на комплексни числа и умножението на комплексно число с реално число образува линейно пространство над полето на реалните числа $\mathbb{R}$. Аналогично, $\mathbb{R}$ над себе си, $\mathbb{R}$ над $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ над себе си също са линейно пространства относно обичайните действия събиране и умножение на числа.

2. Пространството от свободните вектори относно действията събиране на вектори и умножение на вектор с число е линейно пространство над полето на реалните числа. Твърдение 3.1.9 показва, че аксиомите за линейно пространство са в сила.

3. Съвкупността от всички $m\times n$ матрици над числовото поле $\mathbb{F}$ относно операциите събиране на матрици и умножение на матрица с число от $\mathbb{F}$ е линейно пространство над $\mathbb{F}$ тъй като първите осем равенства от Твърдение ..... са точно аксиомите за линейно пространство.

4. Нека в пространството фиксираме една точка и я означим с O. Под *сума на две точки* A *и* B ще разбираме точката C, която е край на насочената отсечка $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. Аналогично дефинираме *произведение на точката* A *с реалното число* λ като точка D, която е край на насочената отсечка $\overrightarrow{OD} = \lambda\overrightarrow{OA}$. Лесно се показва, че точките с така дефинираните операции събиране и умножение с число образуват линейно пространство над $\mathbb{R}$. Бележим го с $\mathbb{R}^3(O)$. Точката O е нулевият вектор на това пространство. Противоположната точка на точка A ще бъде централно симетричната ѝ точка относно O.

5. ***n-мерно векторно пространство над числовото поле*** $\mathbb{F}$ наричаме множеството от всички наредени n-торки

$$\mathbb{F}^n = \{\boldsymbol{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \,|\, \alpha_i \in \mathbb{F}\}$$

с операциите събиране и умножение с число, дефинирани по следния начин:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = (\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \dots, \alpha_n+\beta_n);$$
$$\lambda\,\boldsymbol{a} = (\lambda\,\alpha_1, \lambda\,\alpha_2, \dots, \lambda\,\alpha_n).$$

$\mathbb{F}^n$ е линейно пространство с нулев вектор $\boldsymbol{o} = (0, 0, \ldots, 0)$, а противоположният вектор на $\boldsymbol{a}$ е $-\boldsymbol{a} = (-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n)$. Непосредствена проверка показва, че аксиомите за линейно пространство се удовлетворяват при така дефинираните операции. Наистина, всяка от осемте аксиоми е еквивалентна с n еднотипни скаларни равенства, които са верни съгласно добре познатите ни свойства на числата. Например, аксиома 6 е еквивалентна с равенствата $\lambda\,(\alpha_i + \beta_i) = \lambda\,\alpha_i + \lambda\,\beta_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$, които са в сила поради наличието на дистрибутивен закон при числата.

6. Съвкупността $\mathbb{F}[x] = \{f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \mid a_i \in \mathbb{F}\}$ от всички полиноми с коефициенти от числовото поле $\mathbb{F}$ относно обичайните операции събиране на два полиноми и умножение на полином с число е линейно пространство.

7. Съвкупността от реалните функции, дефинирани в даден интервал, е линейно пространство относно обичайните действия сума на функции и умножение на функция с число:
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x);$$
$$(\lambda\, f)(x) = \lambda\, f(x).$$

Дефиниция 3.3.3 *Нека $\mathbb{L}$ е линейно пространство. Непразното подмножество $\mathbb{U}$ на $\mathbb{L}$ се нарича **подпространство** на $\mathbb{L}$, ако самото то е линейно пространство относно операциите в $\mathbb{L}$.*

Дефиниция 3.3.4 *Казваме, че подмножеството $\mathbb{M}$ на $\mathbb{L}$ е **затворено** относно операциите събиране на вектори и умножение на вектор с число, ако от $x, y \in \mathbb{M}$ следва $x + y \in \mathbb{M}$ и $\lambda\, x \in \mathbb{M}$ за всяко $\lambda \in \mathbb{F}$.*

Твърдение 3.3.5 *Непразното подмножество $\mathbb{U}$ на $\mathbb{L}$ е подпространство тогава и само тогава, когато е затворено относно операциите в $\mathbb{L}$.*

Доказателство. Ако $\mathbb{U}$ е подпространство на $\mathbb{L}$, то операциите в $\mathbb{L}$ трябва, съгласно дефиницията, да са операции и в $\mathbb{U}$. Следователно, за всяко x и y от $\mathbb{U}$ и всяко число $\lambda \in \mathbb{F}$ трябва $x + y \in \mathbb{U}$ и $\lambda\, x \in \mathbb{U}$.

Обратно, ако $\mathbb{U}$ е затворено, то ограниченията на операциите в $\mathbb{L}$ се явяват операции в $\mathbb{U}$ и очевидно аксиомите за линейно пространство се изпълняват и за векторите от подмножеството $\mathbb{U}$ (обикновено се казва, че аксиомите се изпълняват по наследство).

Примери за подпространства:

1. Триъгълните матрици образуват подпространство в съвкупността от квадратните матрици.

2. Точките от права, минаваща през началото O, образуват подпространство на линейното пространство $\mathbb{R}^2(O)$ от всички точки в равнината (пример 4 за линейни пространства).

3. Съвкупността

$$\mathbb{U} = \{\boldsymbol{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{F}^n \mid r_1\alpha_1 + \cdots + r_n\alpha_n = 0,\, r_i \in \mathbb{F}\},$$

където $r_1, \ldots, r_n$ са фиксирани числа, е подпространство на n-мерното векторно пространство.

Дефиниция 3.3.6 *Нека $\mathbb{L}$ е линейно пространство. Казваме, че векторът $\boldsymbol{a} \in \mathbb{L}$ е **линейна комбинация** на съвкупността $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{a}_i\}_{i\in I}$ от вектори на $\mathbb{L}$, ако съществуват краен брой числа $\{\lambda_i\}_{i\in I}$, които са различни от нула, така че $\boldsymbol{a} = \sum_{i\in I} \lambda_i \, \boldsymbol{a}_i$.*

Дефиниция 3.3.7 *Нека $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{a}_i\}_{i\in I}$ е произволно подмножество от вектори на $\mathbb{L}$. Съвкупността $l(\boldsymbol{A})$ от всички вектори на $\mathbb{L}$, явяващи се линейни комбинации на векторите на $\boldsymbol{A}$, се нарича **линейна обвивка на $\boldsymbol{A}$**.*

Тривиална проверка (която оставяме на читателите) показва, че $\ell(\mathbf{A})$ е линейно подпространство на $\mathbb{L}$.

Упражнение 3.3.1 *Докажете, че $\ell(\boldsymbol{A})$ е сечение на всички подпространства съдържащи $\boldsymbol{A}$ и е минималното по включване такова подпространство.*

Нека $\mathbb{L}$ е линейно пространство и $\mathbf{A} = \{\boldsymbol{a}_i\}_{i\in I}$ е съвкупност от вектори на $\mathbb{L}$. Като синоним на съвкупност често ще използваме думата система.

Дефиниция 3.3.8 *Казваме, че векторите $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ от $\mathbb{L}$ са **линейно зависими**, ако съществуват числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, поне едно от които е различно от нула, така че*

$$\lambda_1 \, \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \, \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n \, \boldsymbol{a}_n = 0. \tag{1}$$

*В противен случай казваме, че векторите са **линейно независими**, т.е. векторите $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ са линейно независими, ако от (1) следва, че $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.*

Дефиницията за линейна зависимост и независимост на вектори дадохме само за крайни съвкупности, но тя се обобщава по естествен начин и за безкрайни.

Дефиниция 3.3.9 *Казваме, че една безкрайна система от вектори* $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{a}_i\}_{i\in I}$ *на* $\mathbb{L}$ *е* ***линейно независима****, ако всяка нейна крайна подсистема е линейно независима. В противен случай (т.е. има поне една крайна линейно зависима подсъвкупност) казваме, че* $\boldsymbol{A}$ *е* ***линейно зависима****.*

В този курс ние ще разглеждаме главно линейни пространства, в които има само крайни линейно независими съвкупности. Ако разглеждаме пространства, съдържащи безкрайни линейно независими системи, това ще бъде изрично отбелязано. Пример на такова линейно пространство е множеството $\mathbb{F}[x]$ от всички полиноми. Съвкупността $1, x, x^2, x^3, \ldots$ е една безкрайна линейно независима система в него.

Свойство 3.3.7 *Система, състояща се само от един вектор* $\boldsymbol{a}$*, е линейно зависима тогава и само тогава, когато* $\boldsymbol{a}$ *е нулевият вектор.*

Свойство 3.3.8 *Ако една система вектори съдържа линейно зависима подсистема (в частност, ако съдържа нулевия вектор), то цялата система е линейно зависима.*

Доказателствата на тези две свойства по същество не се различават от тези, дадени в § 3.1.3 и затова ги изпускаме.

Свойство 2 може да се преформулира (двете твърдения са еквивалентни) във вида:

Свойство 3.3.9 *Всяка подсъвкупност на една линейно независима система вектори на* $\mathbb{L}$ *е линейно независима.*

Свойство 3.3.10 *Една система вектори* $\boldsymbol{A}$ *на* $\mathbb{L}$ *е линейно зависима тогава и само тогава, когато поне един от векторите ѝ е линейна комбинация на останалите.*

Доказателство. *Необходимост.* Нека $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, е една линейно зависима подсистема на $\mathbf{A}$. Следователно, съществуват числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, поне едно от които е различно от нула, така че

$$\lambda_1\,\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\,\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n\,\boldsymbol{a}_n = 0.$$

Нека за коректност $\lambda_n \neq 0$. Тогава

$$\boldsymbol{a}_n = -\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\,\boldsymbol{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_n}\,\boldsymbol{a}_2 - \cdots - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\,\boldsymbol{a}_{n-1},$$

което показва, че $\boldsymbol{a}_n$ е линейна комбинация на векторите от $\mathbf{A}$.

Достатъчност. Нека векторът $\boldsymbol{a} \in \mathbf{A}$ е линейна комбинация на останалите вектори от $\mathbf{A}$. Тогава съществуват вектори $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$, от $\mathbf{A}$, такива че $\boldsymbol{a} = \mu_1\,\boldsymbol{a}_1 + \mu_2\,\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \mu_k\,\boldsymbol{a}_k$. От последното равенство следва, че

$$\mu_1\,\boldsymbol{a}_1 + \mu_2\,\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \mu_k\,\boldsymbol{a}_k + (-1)\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}.$$

Тъй като $-1 \neq 0$, то векторите $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}$ са линейно зависими, откъдето следва, че $\mathbf{A}$ е линейно зависима система вектори.

Теорема 3.3.10 (Основна лема) *Ако всеки вектор на системата*

$$\text{(i)} \qquad \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$$

се изразява линейно (т.е. като линейна комбинация) чрез векторите на системата

$$\text{(ii)} \qquad \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k$$

и $n > k$, то системата (i) *е линейно зависима.*

Доказателство. Теоремата ще докажем с индукция по броя k на векторите на (ii). Векторите на (i) можем да считаме ненулеви, тъй като противното прави системата линейно зависима (което трябва да се докаже).

Нека $k = 1$. Тогава съгласно условието $\boldsymbol{a}_i = \lambda_i \boldsymbol{b}$ за $i = 1, 2, \ldots, n$ и $n > 1$, откъдето получаваме $\boldsymbol{b} = (1/\lambda_1)\boldsymbol{a}_1 = (1/\lambda_2)\boldsymbol{a}_2$. Последното влече

$$\lambda_2 \mathbf{a}_1 - \lambda_1 \boldsymbol{a}_2 = (\lambda_2\lambda_1 - \lambda_1\lambda_2)\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o},$$

т.е. (i) е линейно зависима.

При предположение, че твърдението е вярно за $k-1$ ще покажем верността му и за k.

Съгласно условието в сила са равенствата

$$\left|\begin{array}{lllllllll}
\boldsymbol{a}_1 & = & \lambda_{11}\boldsymbol{b}_1 & + & \lambda_{12}\boldsymbol{b}_2 & + & \ldots & + & \lambda_{1k}\boldsymbol{b}_k \\
\boldsymbol{a}_2 & = & \lambda_{21}\boldsymbol{b}_1 & + & \lambda_{22}\boldsymbol{b}_2 & + & \ldots & + & \lambda_{2k}\boldsymbol{b}_k \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\boldsymbol{a}_n & = & \lambda_{n1}\boldsymbol{b}_1 & + & \lambda_{n2}\boldsymbol{b}_2 & + & \ldots & + & \lambda_{nk}\boldsymbol{b}_k
\end{array}\right.$$

Понеже $\boldsymbol{a}_n \neq 0$, то поне един от коефициентите λ_{nj} е ненулев. За определеност нека $\lambda_{nk} \neq 0$. Тогава

$$\boldsymbol{b}_k = \frac{1}{\lambda_{nk}}\boldsymbol{a}_n - \frac{\lambda_{n1}}{\lambda_{nk}}\mathbf{b}_1 - \cdots - \frac{\lambda_{n\,k-1}}{\lambda_{nk}}\boldsymbol{b}_{k-1}.$$

Замествайки в горните равенства се получава

$$\left|\begin{array}{lllllllll} \boldsymbol{a}'_1 & = & \mu_{11}\boldsymbol{b}_1 & + & \mu_{12}\boldsymbol{b}_2 & + & \ldots & + & \mu_{1,k-1}\boldsymbol{b}_{k-1} \\ \boldsymbol{a}'_2 & = & \mu_{21}\boldsymbol{b}_1 & + & \mu_{22}\boldsymbol{b}_2 & + & \ldots & + & \mu_{2,k-1}\boldsymbol{b}_{k-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a}'_{n-1} & = & \mu_{n-1,1}\boldsymbol{b}_1 & + & \mu_{n-1,2}\boldsymbol{b}_2 & + & \ldots & + & \mu_{n-1,k-1}\boldsymbol{b}_{k-1} \end{array}\right. ,$$

където $\boldsymbol{a}'_i = \boldsymbol{a}_i - \dfrac{\lambda_{ik}}{\lambda_{nk}}\boldsymbol{a}_n$.

От $n-1 > k-1$ и индукционното предположение следва, че векторите $\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \ldots, \boldsymbol{a}'_{n-1}$ са линейно зависими, т.е. съществуват числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$, поне едно от които различно от нула, така че

$$\lambda_1(\boldsymbol{a}_1 - \frac{\lambda_{1k}}{\lambda_{nk}}\boldsymbol{a}_n) + \lambda_2(\boldsymbol{a}_2 - \frac{\lambda_{2k}}{\lambda_{nk}}\boldsymbol{a}_n) + \cdots + \lambda_{n-1}(\boldsymbol{a}_{n-1} - \frac{\lambda_{n-1,k}}{\lambda_{nk}}\boldsymbol{a}_n) = \boldsymbol{o}$$

Разкривайки скобите получаваме

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{o},$$

където $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}\lambda_n$ е ненулева $n-$орка. Последното показва,че (i) са линейно зависими. С това доказателството е завършено.

Следствие 3.3.11 *Всеки $n+1$ (и повече) на брой n-мерни вектора са линейно зависими.*

Доказателство. Наистина всеки n-мерен вектор $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ се изразява като линейна комбинация на векторите

$$\begin{array}{lcl} \boldsymbol{e}_1 & = & (1,\ 0,\ \ldots,\ 0) \\ \boldsymbol{e}_2 & = & (0,\ 1,\ \ldots,\ 0) \\ \cdots & . & \cdots \\ \boldsymbol{e}_n & = & (0,\ 0,\ \ldots,\ 1) \end{array} , \qquad (3.3.1)$$

по-точно $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{a}_n$. Тогава прилагайки Основната лема, където (3.3.1) изпълнява ролята на системата (ii), а съвкупността от $n+1$ или повече вектора е системата (i), получаваме твърдението на следствието.

3.4 Ранг на система вектори. Размерност, базис, координати.

Нека $\mathbb{L}$ е линейно пространство и $A = \{\boldsymbol{a}_i\}_{i\in I}$ е съвкупност от вектори на $\mathbb{L}$ (крайна или безкрайна, т.е. индексното множество I е крайно или безкрайно), в която има най-много краен брой линейно независими вектори. Ще напомним, че в тези лекции думите съвкупност, система и множество от вектори са синоними.

Дефиниция 3.4.1 ***Ранг на системата вектори*** *$A = \{\boldsymbol{a}_i\}_{i\in I}$ наричаме максималния възможен брой линейно независими вектори на A.*

Теорема 3.4.2 *Рангът на системата вектори $A = \{\boldsymbol{a}_i\}_{i\in I}$ е r тогава и само тогава, когато в нея има r линейно независими вектора и всеки вектор от A е тяхна линейна комбинация.*

Доказателство. *Необходимост.* Нека A има ранг r, т.е. в нея има r линейно независими вектори $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_r$, но всеки $r+1$ вектори са линейно зависими. Нека $\boldsymbol{a}$ е произволен вектор от съвкупността A. Следователно $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_r$ е линейно зависима система и съгласно Свойство 4 $\boldsymbol{a}$ се изразява като линейна комбинация на $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_r$.

Достатъчност. Нека $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_r$ са r линейно независими вектори от A и всеки друг вектор от A е тяхна линейна комбинация. Да вземем произволно подмножество $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_m$ от $m \geq r+1$ вектори на A. Съгласно условието всеки вектор от това множество се изразява линейно чрез векторите $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_r$, откъдето прилагайки Основната лема от предния параграф получаваме, че векторите $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_m$ са линейно зависими. Следователно рангът на A е точно r.

Дефиниция 3.4.3 ***Максимална линейно независима подсистема*** *на системата $A = \{\boldsymbol{a}_i\}_{i\in I}$ наричаме всяка подсъвкупност от линейно независими вектори на A, която при добавяне на кой и да е друг вектор на A става линейно зависима.*

Теорема 3.4.4 *Всеки две максимални линейно независими подсистеми на A се състоят от един и същ брой вектори равен на ранга на A.*

Доказателство. Нека $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ и $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_k$ са две максимални линейно независими подсистеми на A. Следователно векторите $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}_j$ са вече линейно зависими за всяко $j = 1, 2, \dots, k$. Но това означава (свойство 3.3.10) векторът $\boldsymbol{b}_j$ е линейна комбинация на векторите $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$, т.е. системата от вектори $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_k$ се изразява линейно чрез системата $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$. Тогава Основната лема и линейната независимост на векторите на $\{\boldsymbol{b}_j\}$ показват, че $k \leq n$. Аналогично се вижда, системата вектори $\{\boldsymbol{a}_i\}$ се изразява линейно чрез векторите $\{\boldsymbol{b}_j\}$, откъдето следва, че $k \geq n$. Следователно $n = k$. Тъй като в A има n линейно независими вектора и това е максималният възможен брой линейно независими вектори (видяхме, че всяка максимална система има n вектора), то рангът на A е n.

Теорема 3.4.5 *Ако системата A се изразява линейно чрез системата B, то рангът на A не надминава този на B.*

Доказателство. От условието следва, че всяка максимална линейно независима подсистема на B остава такава и за обединението $A \cup B$, т.е. рангът на B съвпада с този на $A \cup B$. Следователно рангът на A не надминава този на B.

Дефиниция 3.4.6 *Две системи вектори наричаме* ***(линейно) еквивалентни****, когато векторите на първата са линейни комбинации от векторите на втората и обратно - векторите на втората се изразяват линейно чрез вектори на първата.*

Следствие 3.4.7 *Две еквивалентни системи вектори имат един и същ ранг.*

Дефиниция 3.4.8 *Казваме, че линейното пространство $\mathbb{L}$ над числовото поле $\mathbb{F}$ е* ***n-мерно (има размерност n)****, когато съществуват n линейно независими вектори в него и всеки $n+1$ (очевидно и повече) вектора са линейно зависими. Бележим с $\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{L} = n$ или само $\dim \mathbb{L} = n$, ако от контекста е ясно над кое числово поле е линейното пространство.*

Теорема 3.4.9 *Линейното пространство $\mathbb{L}$ има размерност n тогава и само тогава, когато в него съществуват n линейно независими вектори и всеки друг негов вектор е тяхна линейна комбинация.*

Доказателство. По същество тази теорема представлява преформулировка на Теорема 3.4.2. Наистина съгласно дефиницията пространството $\mathbb{L}$ има размерност n точно тогава, когато рангът на съвкупността от всичките му вектори е n. Но това е изпълнено според Теорема 3.4.2 тогава и само тогава, когато в $\mathbb{L}$ има n линейно независими вектора и всеки друг негов вектор е тяхна линейна комбинация.

Както вече отбелязахме понятията размерност на линейно пространство и ранг на система вектори по същество съвпадат. Следвайки наложените от времето традиции ние ще говорим за размерност на линейни пространства и подпространства, а за ранг на произволни съвкупности от вектори (които не са подпространства).

Упражнение 3.4.1 *Покажете, че рангът на системата вектори* $A = \{\boldsymbol{a}_i\}_{i\in I}$ *от едно линейно пространство съвпада с размерността (като линейно подпространство) на линейната ѝ обвивка* $\ell(A)$.

Дефиниция 3.4.10 ***Базис*** *на* n*-мерното линейното пространство* $\mathbb{L}$ *наричаме всяка съвкупност от* n *линейно независими вектори на* $\mathbb{L}$.

От Теорема 3.4.9 следва, че една съвкупност от вектори на n-мерното линейното пространство $\mathbb{L}$ е базис тогава и само тогава, когато е линейно независима и всеки вектор на $\mathbb{L}$ е линейна комбинация от векторите ѝ.

Твърдение 3.4.11 *Ако* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ *е един базис на* n*-мерното линейното пространство* $\mathbb{L}$, *то всеки вектор* $\boldsymbol{a} \in \mathbb{L}$ *се изразява и то по единствен начин като линейна комбинация*

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n$$

на базисните вектори.

Дефиниция 3.4.12 *Еднозначно определените коефициенти* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *в представянето на* $\boldsymbol{a}$ *като линейна комбинация на базисните вектори* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ *се наричат* ***координати на*** $\boldsymbol{a}$ ***в базиса*** $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.

Примери на крайномерни пространства

Пример 3.4.1 n-мерното векторно пространство $\mathbb{F}^n$ е пример на линейно пространство с размерност n. Векторите (3.3.1) от предния параграф са един негов базис наричан ***стандартен базис***.

Пример 3.4.2 Съвкупността от свободните вектори в пространството е линейно пространство с размерност 3, а в равнината - с размерност 2.

Пример 3.4.3 Линейното пространство $\mathbb{R}^3(O)$ от всички точки в реалното геометрично пространство с избрана точка O е тримерно линейно пространство.

Пример 3.4.4 Линейното пространство $M_n(\mathbb{F})$ от всички квадратни матрици с елементи от $\mathbb{F}$ е с размерност n^2. Един базис на $M_n(\mathbb{F})$, наричан ***стандартен базис*** представлява съвкупността от матрици $\mathbf{E}_{ij}$ имащи само нулеви елементи с изключение на елемента в i-ти ред и j-ти стълб, който е единица.

Изоморфизъм между линейни пространства

Дефиниция 3.4.13 *Две линейни пространства $\mathbb{L}$ и $\mathbb{L}$ над едно и също числово поле $\mathbb{F}$ наричаме* ***изоморфни*** *(бележим с $\mathbb{L} \cong \mathbb{L}'$) ако съществува изображение $\varphi : \ \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{L}'$, което е биекция и*

$$\begin{aligned} \varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= \varphi(\boldsymbol{x})+\varphi(\boldsymbol{y}) \\ \varphi(\lambda\boldsymbol{x}) &= \lambda\varphi(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

, за всяко $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{L}$ и $\lambda \in \mathbb{F}$. Изображението φ се нарича ***изомопфизъм***.

Ще отбележим следните свойства на изоморфизма:

Свойство 3.4.1 *При изоморфизъм нулевият елемент на $\mathbb{L}$ отива в нулевия елемент на $\mathbb{L}'$, а противоположният на $\boldsymbol{x} \in \mathbb{L}$ в противоположния на $\varphi(\boldsymbol{x})$, т.е. $\varphi(-\boldsymbol{x}) = -\varphi(\boldsymbol{x})$.*

Наистина $\varphi(\boldsymbol{o}) = \varphi(0.\boldsymbol{o}) = 0.\varphi(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{o}$ и $\varphi(\boldsymbol{x})+\varphi(-\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{o}$.

Свойство 3.4.2 *Векторите $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_k$ от $\mathbb{L}$ са линейно зависими тогава и само тогава, когато техните образи $\varphi(\boldsymbol{e}_1), \varphi(\boldsymbol{e}_2), \dots, \varphi(\boldsymbol{e}_k)$ са такива в $\mathbb{L}'$.*

Наистина от дефиницията на изоморфизъм за произволна линейна комбинация на $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_k$ е в сила

$$\varphi(\lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{e}_k) = \lambda_1\varphi(\boldsymbol{e}_1) + \lambda_2\varphi(\boldsymbol{e}_2) + \cdots + \lambda_k\varphi(\boldsymbol{e}_k)$$

и следователно $\lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{o}$ е еквивалентно с равенството $\lambda_1\varphi(\boldsymbol{e}_1) + \lambda_2\varphi(\boldsymbol{e}_2) + \cdots + \lambda_k\varphi(\boldsymbol{e}_k) = \boldsymbol{o}$. В такъв случай равенството $\lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{o}$ влече $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$ тогава и само тогава, когато това следва от равенството $\lambda_1\varphi(\boldsymbol{e}_1) + \lambda_2\varphi(\boldsymbol{e}_2) + \cdots + \lambda_k\varphi(\boldsymbol{e}_k) = \boldsymbol{o}$.

Свойство 3.4.3 *Обратното изображение на изоморфизъм също е изоморфизъм*

Доказателство. Нека $\varphi : \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{L}'$ е изоморфизъм. Тогава за всеки $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}' \in \mathbb{L}'$ съществуват $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{L}$, така че $\boldsymbol{x}' = \varphi(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{y}' = \varphi(\boldsymbol{y})$ и е изпълнено

$$\varphi^{-1}(\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{y}') = \varphi^{-1}(\varphi(\boldsymbol{x})+\varphi(\boldsymbol{y})) = \varphi^{-1}(\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})) = \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \varphi^{-1}(\boldsymbol{x}')+\varphi^{-1}(\boldsymbol{y}')$$

$$\varphi^{-1}(\lambda\boldsymbol{x}') = \varphi^{-1}(\lambda\varphi(\boldsymbol{x})) = \varphi^{-1}(\varphi(\lambda\boldsymbol{x})) = \lambda\boldsymbol{x} = \lambda\varphi^{-1}(\boldsymbol{x}')$$

Доказаното свойство показва, че $\mathbb{L} \cong \mathbb{L}'$ влече $\mathbb{L}' \cong \mathbb{L}$, т.е. налице е симетричност. Освен това свойствата на биекцията ни дават, че композицията на изоморфизми е също изоморфизъм.

Теорема 3.4.14 *Две крайномерни линейни пространства над числовото поле $\mathbb{F}$ са изоморфни тогава и само тогава, когато са с една и съща размерност.*

Доказателство. *Необходимост* Нека $\varphi : \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{L}'$ е изоморфизъм и $\dim \mathbb{L} = n$/ Нека $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ е базис на $\mathbb{L}$. Съгласно Свойство 3.4.2 векторите $\varphi(\boldsymbol{e}_1), \varphi(\boldsymbol{e}_2), \ldots, \varphi(\boldsymbol{e}_n)$ са линейно независими в $\mathbb{L}'$, т.е. $\dim \mathbb{L}' \geq n$. Но φ^{-1} е също изоморфизъм (Свойство 3.4.3), което влече $n = \dim \mathbb{L} \geq \dim \mathbb{L}$. Следователно $\dim \mathbb{L}' = \dim \mathbb{L} = n$. *Достатъчност* Ще покажем, че всяко линейно пространство с размерност n е изоморфно на $\mathbb{F}^n$. Нека $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ е базис на $\mathbb{L}$. Дефинираме изображението $\varphi : \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{F}^n$ по правилото: всяко $\boldsymbol{x} \in \mathbb{L}$ се изобразява в $\varphi(\boldsymbol{x}) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, където $\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n$.
Така дефинираното изображение е биекция. Наистина нека $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ е произволен елемент на $\mathbb{F}^n$. Тогава $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n$ е неговият първообраз при φ. Тъй като друг вектор на $\mathbb{L}$ не може да има същите координати, то $\boldsymbol{a}$ е единствен първообраз на $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Следователно φ е биекция.
Останалите своиства, които трябва да притежава φ съгласно дефиницията на изоморфизъм следват от свойствата на координатите и дефиницията на операциите в $\mathbb{F}^n$.

3.5 Ранг на матрица. Елементарни преобразувания и представянето им като умножение с неособени матрици.

Дефиниция 3.5.1 *Нека $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ е произволна матрица над числовото поле $\mathbb{F}$.* ***Минор от k-ти ред*** *на $\boldsymbol{A}$ наричаме детерминантата на $k \times k$ матрицата образувана от общите елементи на кои да е (но фиксирани) k реда и k стълба на $\boldsymbol{A}$. Минорите от първи ред са елементите на матрицата.*

Дефиниция 3.5.2 *Казваме, че* ***рангът на матрицата $\boldsymbol{A}$*** *е r, ако $\boldsymbol{A}$ има ненулев минор от r-ти ред, но всеки минор от $r+1$-ви и по-висок ред е нулев. Бележим $rank(\boldsymbol{A}) = r$.*

Пример 3.5.1 Рангът на всяка неособена $n \times n$ матрица е точно n, тъй като детерминантата ѝе ненулевият минор от най-висок ред.

Пример 3.5.2 Матрицата $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ има ранг 2, тъй като $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$ е ненулев минор от втори ред, а $\det \mathbf{A} = 0$ е единственият минор от ред 3.

Пример 3.5.3 нулевата матрица има ранг нула, тъй като всичките ѝминори от първи и по-висок ред са нулеви. Всяка ненулева матрица има ненулев ранг, защото поне един минор от първи ред е ненулев.

Теорема 3.5.3 (теорема за ранга) *Рангът на системата вектор-редове на матрицата $\boldsymbol{A}$ е равен на този на системата вектор-стълбове и съвпада с ранга на матрицата.*

Доказателство. Нека рангът на матрицата

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

е r и нека за конкретност минорът Δ_r от r-ти ред в горния ляв ъгъл на матрицата е различен от нула (вземането на минора в общо положение само ще усложни означенията, но не влияе на разсъжденията в доказателството). Да означим с $\boldsymbol{a}_k = (a_{k1}, \dots, a_{kr}, \dots a_{kn})$ $k = 1, 2, \dots, n$, $k-$тия ред на $\mathbf{A}$.

Ще покажем, че системата от тези m на брой n-мерни вектора $\boldsymbol{a}_k$ има ранг точно r. За целта разглеждаме детерминантата $\Delta_{r+1} = \Delta_{r+1}(k, j)$ от $r + 1$-ви ред, получена като минорът Δ_r е ограден със съответните елементи от k-тия ред и j-тия стълб:

$$\Delta_{r+1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kr} & a_{kj} \end{vmatrix}$$

При $j \leq r$ или $k \leq r$ горната детерминанта е равна на нула, тъй като има съвпадащи стълбове или редове. Ако $j \geq r$ и $k \geq r$, то $\Delta_{r+1} = 0$, защото е минор от $r + 1$-ред. Развиваме Δ_{r+1} по последния стълб:

$$0 = \Delta_{r+1} = a_{kj}\Delta_r + a_{rj}\delta_r + a_{r-1\,j}\delta_{r-1} + \dots + a_{1j}\delta_1,$$

където δ_i е адюнгиранато количество на a_{ij} в развитието на Δ_{r+1}.
Тъй като $\Delta_r \neq 0$, то делейки на него получаваме

$$a_{kj} = \delta'_r a_{rj} + \delta'_{r-1} a_{r-1\,j} + \dots + \delta'_1 a_{1j}.$$

Последното е вярно за всяко j и очевидно $\delta_r, \dots, \delta_1$ не зависят от елементите a_{ij} на последния стълб. Следователно k-тия ред $\boldsymbol{a}_k$ на $\mathbf{A}$ е линейна комбинация с коефициенти $\delta'_r, \dots, \delta'_1$ на първите r реда. Но първите r реда са линейно независими щом $\Delta_r \neq 0$. Следователно рангът на системата вектор-редове на $\mathbf{A}$ е точно равен на ранга ѝ r.
Аналогично се получава същият резултат и за стълбовете.

Следствие 3.5.4 *Рангът на една матрица е r, ако тя има ненулев минор от ред r и всеки ограждащ го минор от ред $r + 1$ е нула.*

Следствие 3.5.5 *Ако една детерминанта е нула, то редовете (стълбовете) ѝ са линейно зависими.*

Пример 3.5.4 Да разгледаме матрицата $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -7 & -6 & -4 \end{pmatrix}$. Минорът $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, а ограждащите го минори от трети ред $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -7 & -6 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & -7 & -4 \end{vmatrix}$ са нулеви. Следователно рангът на $\mathbf{A}$ е две.

Теорема 3.5.6 *Рангът на произведението на две матрици не надминава ранга на всяка от тях.*

Доказателство. Нека $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$. От правилото за умножение на матрици следва, че j-тия стълб на $\mathbf{C}$ е линейна комбинация на стълбовете на $\mathbf{A}$ с коефициенти елементите на j-тия стълб на $\mathbf{B}$. Следователно рангът на системата вектор-стълбове на $\mathbf{C}$ не надминава този на системата вектор-стълбове на $\mathbf{A}$, откъдето и теоремата за ранга получаваме $\operatorname{rank}(\mathbf{C}) \leq \operatorname{rank}(\mathbf{A})$. Аналогично, вземайки предвид, че редовете на $\mathbf{C}$ са линейни комбинации на редовете на $\mathbf{B}$ получаваме, че $\operatorname{rank}(\mathbf{C}) \leq \operatorname{rank}(\mathbf{B})$.
Следователно $\operatorname{rank}(\mathbf{C}) \leq \min\{\operatorname{rank}(\mathbf{A}),\ \operatorname{rank}(\mathbf{B})\}$.

Следствие 3.5.7 *Рангът на една матрица не се променя при умножение с неособена матрица.*

Доказателство. Нека $\mathbf{A}$ е $m \times n$ матрица с ранг r, а е $\mathbf{P}$ неособена $m \times m$. Съгласно теоремата $\operatorname{rank}(\mathbf{PA}) \leq \operatorname{rank}(\mathbf{A})$. От друга страна $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = \operatorname{rank}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{PA}) \leq \operatorname{rank}(\mathbf{PA})$. Следователно $\operatorname{rank}(\mathbf{PA}) = \operatorname{rank}(\mathbf{A})$.

Дефиниция 3.5.8 *Елементарни преобразувания на редовете (стълбовете) на една матрица наричаме следните преобразувания:*

1. *Умножаване на ред (стълб) с число $\lambda \neq 0$;*

2. *Умножаване на ред (стълб) с число λ и прибавянето му към друг ред (стълб).*

3. *Разместване на два реда (стълба).*

Теорема 3.5.9 *Елементарни преобразувания не променят ранга на матрицата. С елементарни преобразувания всяка $m \times n$ матрица с ранг r може да се преобразува във вида*

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}_1 \\ \boldsymbol{O}_2 & \boldsymbol{O}_3 \end{pmatrix}, \tag{3.5.1}$$

където $\boldsymbol{O}_1$ е $r \times (n-r)$, $\boldsymbol{O}_2$ е $(m-r) \times r$, а $\boldsymbol{O}_3$ е $(m-r) \times (n-r)$ нулева матрица.

Доказателство. Нека $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m$ е системата от вектор-редове на матрицата

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Преобразованията 1 и 2 я привеждат съответно към $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \lambda\boldsymbol{a}_i, \dots, \boldsymbol{a}_m$ и $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_i, \dots, \lambda\boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}_j, \dots, \boldsymbol{a}_m$. Очевидно те са еквивалентни на изходната и следователно и трите системи имат един и същи ранг r (Следствие 3.4.7). Преобразованието 3 очевидно също не променя ранга на матрицата.

Размествайки редове и стълбове, ако е необходимо може да си осигурим, че $a_{11} \neq 0$. Делим първия ред на a_{11}. Полученият ред го умножаваме последователно с $-a_{i1}$ и прибавяме към i-тия ред за $i = 2, 3, \dots, n$. В резултат получаваме следната матрица със същия ранг r:

$$\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{i2} & \dots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} \end{pmatrix}.$$

Аналогично, без ограничение на общност можем да считаме, че $a'_{22} \neq 0$ и повтаряйки горната процедура ще анулираме елементите под него. Продължавайки описаните преобразования (които не изменят ранга на $\mathbf{A}$) ще получим следната матрица с трапецовидна форма имаща точно r ненулеви реда

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & \dots & b_{1r} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & b_{2r} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

(***Забележка.*** Ако забраним разместването на стълбове в горната процедура ще получим също матрица с r ненулеви реда, но в общия случай тя ще има ***стъпаловидна форма***.)

Сега умножавайки първия стълб с $-b_{1j}$ и прибавяйки произведението към j-тия стълб за $j = 2, \dots, n$ ще анулираме елементите от първия ред (без първия елемент). Аналогично анулираме елементите на следващите редове и накрая получаваме матрица, която има нули във всички позиции с изключение на първите r елемента на главния диагонал, които са единици. С това теоремата е доказана.

Теорема 3.5.10 *Всяко елементарно преобразувание върху редовете (стълбовете) на матрицата $\boldsymbol{A}$ може да се реализира с умножение на $\boldsymbol{A}$ отляво (отдясно) с подходяща неособена матрица.*

Доказателство. Съгласно дефиницията на произведение на матрици, елементите $\mathbf{E}_{ij}$ на стандартния базис на M_n (виж пример) се умножават по правилото

$$\mathbf{E}_{ij}\mathbf{E}_{kl} = \begin{cases} \mathbf{O}, & i \neq j, \\ \mathbf{E}_{il}, & i = j \end{cases}.$$

Освен това всички редове на произведението $\mathbf{E}_{ij}\mathbf{A}$ са нулеви с изключение на i-тия ред, който е равен на j-тия: $\boldsymbol{a}_j = (a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn})$.

Директната проверка показва, че

- умножението на i-тия ред с $\lambda \neq 0$ е еквивалентно на умножаване на $\mathbf{A}$ отляво с неособената матрица $\mathbf{E}_i(\lambda) = \mathbf{E}_m + (\lambda - 1)\mathbf{E}_{ii}$.

- умножаване на i-тия ред с λ и прибавянето му към j-тия ред се реализира чрез умножаване отляво с неособената матрица $\mathbf{S}_{ij}(\lambda) = \mathbf{E}_m + \lambda\mathbf{E}_{ji}$.
- разместването на i-тия и j-тия редове се реализира чрез умножение отляво с неособената матрица $\mathbf{P}_{ij} = \mathbf{E}_m - \mathbf{E}_{ii} - \mathbf{E}_{jj} + \mathbf{E}_{ij} + \mathbf{E}_{ji}$, т.е.

Елементарните преобразования върху стълбове се реализират по аналогичен начин с умножение отдясно с неособени матрици от същия вид. С това теоремата е доказана.

Следствие 3.5.11 *За всяка матрица с ранг r съществуват неособени матрици* $\boldsymbol{P}$ *и* $\boldsymbol{Q}$*, такива че*

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{PRQ},$$

където $\boldsymbol{R}$ *е матрицата (3.5.1).*

Доказателство. Съгласно Теорема 3.5.10 матрицата $\mathbf{A}$ може да се преобразува чрез елементарни преобразования в $\mathbf{R}$. Но всяко елементарно преобразование върху редовете се реализира чрез умножение отляво, а всяко такова върху стълбовете - чрез умножение отдясно с неособена матрица. Следователно в сила е равенството

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}_k\mathbf{P}_{k-1}\dots\mathbf{P}_1\mathbf{A}\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\dots\mathbf{Q}_l,$$

където $\mathbf{P}_i$ отговарят на преобразованията върху редовете, а $\mathbf{Q}_j$ на преобразованията върху стълбовете. Полагайки $\mathbf{P} = (\mathbf{P}_k\mathbf{P}_{k-1}\dots\mathbf{P}_1)^{-1}$ и $\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\dots\mathbf{Q}_l)^{-1}$ получаваме твърдението.

Горните резултати ни дават удобен начин за решаване на матрични уравнения. Нека разгледаме уравнението $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, където $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ са с еднакъв брой редове (в противния случай очевидно не съществува матрица $\mathbf{X}$ решение на уравнението). Ще се спрем на частния случай, когато $\det\mathbf{A} \neq 0$. Тогава уравнението има единствено решение и то е $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. За да получим $\mathbf{X}$ ще запишем $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ една до друга и ще разгледаме получената матрица $(\mathbf{A} \mid \mathbf{B})$. Тъй като $\mathbf{A}$ е квадратна и неособена, то с елементарни преобразувания само по редове може да я приведем в единична матрица $\mathbf{E}$. Извършвайки тези преобразувания направо над матрицата $(\mathbf{A} \mid \mathbf{B})$ ние ще получим нова матрица $(\mathbf{E} \mid \mathbf{C})$. Съгласно Теорема 3.5.10 $\mathbf{E} = \mathbf{PA}$ и $\mathbf{C} = \mathbf{PB}$, където е неособената матрица съответстваща на преобразованията на редовете. Но в такъв случай $\mathbf{P} = \mathbf{A}^{-1}$ и следователно $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} == \mathbf{X}$.

Матриците от вида $\mathbf{BA}^{-1}$ се намират след транспониране на $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ и транспониране на резултата или с преобразования по стълбове на матрицата $\binom{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}$

3.6 Теорема на Руше. Хомогенни системи линейни уравнения.

Нека е дадена система от m линейни уравнения с n неизвестни $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\left|\begin{array}{lllllll} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \ldots & + & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \ldots & + & a_{2n}x_n & = b_1 \\ \ldots & . & \ldots & . \ldots & . & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \ldots & + & a_{mn}x_n & = b_m \end{array}\right. \tag{3.6.1}$$

В §4 на втора глава дефинирахме понятията решение, матрица и стълб от свободните членове на системата. Сега ще дадем още няколко определения, които са ни нужни за последващото изложение.

Дефиниция 3.6.1 ***Разширена матрица*** *на системата (3.6.1) наричаме матрицата*

$$\overline{A} = (A \mid \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & \mid & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & \mid & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & \mid & b_m \end{pmatrix}$$

Дефиниция 3.6.2 *Системата (3.6.1) наричаме* ***съвместима****, ако има поне едно решение. В противния случай тя се нарича* ***несъвместима****.*

В матричен запис (3.6.1) има вида

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \tag{3.6.2}$$

където $\mathbf{A} = (a_{ij})$ е матрицата на системата, а $\mathbf{x}$ и $\mathbf{b}$ са стълбовете от неизвестните и свободните членове съответно.

Теорема 3.6.3 (Руше) *Една система линейни уравнения е съвместима тогава и само тогава, когато рангът на разширената ѝ матрица съвпада с този на матрицата ѝ, т.е. $rank(\overline{A}) = rank(A)$.*

Доказателство. *Необходимост.* Нека (3.6.1) е съвместима и n-орката $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ е едно нейно решение, т.е.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \tag{3.6.3}$$

Правилото за умножение на матрици и горното равенство показват, че стълбът $\mathbf{b}$ е линейна комбинация на стълбовете на $\mathbf{A}$ с коефициенти $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Следователно $\operatorname{rank}(\overline{\mathbf{A}}) \leq \operatorname{rank}(\mathbf{A})$, откъдето и от очевидното неравенство $\operatorname{rank}(\overline{\mathbf{A}}) \geq \operatorname{rank}(\mathbf{A})$ следва равенството.

Достатъчност. Нека $\operatorname{rank}(\overline{\mathbf{A}}) = \operatorname{rank}(\mathbf{A})$. Следователно стълбът $\mathbf{b}$ е линейна комбинация на стълбовете на матрицата $\mathbf{A}$, т.е. съществуват числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, така че

$$\mathbf{b} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{a}_n,$$

където $\mathbf{a}_i$ са стълбовете на $\mathbf{A}$. Но това означава, че е в сила равенство (3.6.3), т.е. n-орката $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ е решение на (3.6.1).

Теорема 3.6.4 *Ако за системата (3.6.1) е в сила* $\operatorname{rank}(\overline{\boldsymbol{A}}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = r < n$, *то тя има безброй решения зависещи от* $n - r$ *параметри. При* $r = n$ *системата има единствено решение.*

Доказателство. Щом рангът на матрицата е r, то съществува ненулев минор от ред r. Нека за опростяване на означенията предположим, че минорът от ред r в горния ляв ъгъл на матрицата е ненулев. Тъй като всички редове на матрицата са линейна комбинация на първите r реда, то може да оставим само първите r уравнения на системата (останалите са тяхна линейна комбинация). Да прехвърлим членовете съдържащи неизвестните $x_{r+1}, \ldots, x_n$ в дясната страна на уравненията. Получаваме

$$\left| \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + \ldots & + & a_{1r}x_r & = b_1 & - & a_{1r+1}x_{r+1} & - \ldots & -a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + \ldots & + & a_{2r}x_r & = b_2 & - & a_{2r+1}x_{r+1} & - \ldots & -a_{2n}x_n \\ \ldots & . \ldots & \ldots & \ldots & . & \ldots & \ldots & . \ldots & \ldots \\ a_{r1}x_1 & + \ldots & + & a_{rr}x_r & = b_r & - & a_{rr+1}x_{r+1} & - \ldots & -a_{rn}x_n \end{array} \right. \tag{3.6.4}$$

Ако дадем на неизвестните $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ произволни стойности ще получим система с r уравнения и r неизвестни x_1,

$x_2, \ldots, x_r$, чиято детерминанта е неособена (минорът е ненулев). Следователно тя има единствено решение (§2.4), т.е. за всеки избор на стойности на $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ получаваме единствено за този избор решение $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на (3.6.4), а следователно и на (3.6.1). Тъй като $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ може да изберем по безброй начина, то изходната система (3.6.1) има безброй решения при $n - r > 0$. Неизвестните $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$, които играят ролята на параметри се наричат ***свободни неизвестни.***

Ако $r = n$, то (3.6.4) е система от n уравнения с n неизвестни и неособена матрица. Следователно има единствено решение.

Метод на Гаус Методът на Гаус за решаване на линейни системи се състои в извършване на елементарни преобразувания на уравненията (подобни на тези при определяне ранга на матрица) с цел да се реализира идеята от доказателството на горната теорема.

При първата стъпка с елементарни преобразувания на уравненията се стремим да оставим само линейно независими уравнения, т. е. да получим еквивалентна на изходната система, чиито уравнения са линейно независими. Това става като започнем да изключваме неизвестните с подходящи умножение на уравнения и прибавяне към други. Вместо да работим със системата и всеки път да преписваме неизвестните можем да вземем разширената матрица и да я приведем в триъгълен (стъполовиден) вид чрез **елементарни преобразования само по редове!** Преобразованията са само по редове тъй като различните стълбовете съответстват на различни неизвестни и например събирането на два стълба би означавало, че събираме коефициентите пред различни неизвестни!
След тази стъпка редовете само от нули можем да ги отстраним.
Ако измежду ненулевите има ред, на който всички елементи са нули с изключение на последния (свободния член) това би означавало, че изходната система е еквивалентна на такава, в която има уравнение $0 = b_i' \neq 0$. Очевидно в този случай системата няма решение. Ако такъв ненулев ред няма, то броят на ненулевите редове е r равен на ранга на матрицата на системата.

На следващата стъпка (обратен ход в метода на Гаус) с елементарни преобразования (пак само по редове!) получаваме матрица, на която r стълба имат само един ненулев елемент равен на 1 и тези единици са в различни редове. Така получените стълбове съответстват на определяемите (тези, които изразяваме) неизвестни, а останалите на свободните.

Следващият пример илюстрира метода на Гаус:

Пример 3.6.1 Нека да решим система

$$\left|\begin{array}{rrrrrrrrr} x_1 & + & 8x_2 & + & 7x_3 & - & 7x_4 & = & -8 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & - & 4x_4 & = & -4 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 4 \end{array}\right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 & -7 & | & -8 \\ 1 & 5 & 5 & -4 & | & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & | & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 6 & 4 & -6 & | & -8 \\ 0 & 9 & 6 & -9 & | & -12 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & | & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5/2 & 0 & 7/2 & | & 6 \\ 0 & 3/2 & 1 & -3/2 & | & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix},$$

т.е. получихме (еквивалентна на изходната) системата

$$\left|\begin{array}{rrrrrrrrr} x_1 & - & 5/2\,x_2 & & & + & 7/2\,x_4 & = & 6 \\ & & 3/2\,x_2 & + & x_3 & - & 3/2\,x_4 & = & -2 \end{array}\right.,$$

т.е.

$$\left|\begin{array}{rrrrrrr} x_1 & = & 5/2\,x_2 & - & 7/2\,x_4 & + & 6 \\ x_3 & = & -3/2\,x_2 & + & 3/2\,x_4 & - & 2 \end{array}\right.,$$

Давайки на свободните неизвестни стойности $x_2 = 2p$ и $x_4 = 2q$, където $p, q \in \mathbb{F}$ са параметри (т.е. могат да приемат произволни стойности) получаваме, че решенията на системата се задават с

$$x_1 = 5p - 7q + 6; \quad x_2 = 2p; \quad x_3 = -3p + 3q - 2; \quad x_4 = 2q.$$

Дефиниция 3.6.5 *Система линейни уравнения, всички свободни членове на която са нули се нарича* ***хомогенна система*** *линейни уравнения.*

В матричен запис една хомогенна система има вида

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0},$$

където $\mathbf{0}$ е нулевият стълб.

Теорема 3.6.6 *Ако рангът на матрицата* $rank(\boldsymbol{A}) = r < n$ *на хомогенната система с* n *неизвестни* $\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$*, то съвкупността от решенията ѝ образуват* $(n-r)$*-мерно линейно подпространство* U *на* $\mathbb{F}^n$*, а съвкупността от решения на всяка нехомогенна система* $\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *има вида*

$$\mathbf{x}_0 + U = \{\mathbf{x}_0 + U \mid \mathbf{u} \in U\},$$

където $\mathbf{x}_0$ *е едно частно решение на* $\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$*, т.е.* $\boldsymbol{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$.

Доказателство. Нека $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ са две решения на хомогенната система, т.е. $\mathbf{Au} = \mathbf{Av} = \mathbf{0}$. Тогава за всяко λ и μ от $\mathbb{F}$е в сила

$$\mathbf{A}(\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{Au} + \mu\mathbf{Av} = \lambda.\mathbf{0} + \mu.\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Следователно решенията на хомогенната система образуват линейно подпространство на $\mathbb{F}^n$.
Нека сега $\mathbf{x}_0$ е едно частно решение, а $\mathbf{y}$ да е произволно решение на $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Тогава

$$\mathbf{Ax}_0 = \mathbf{Ay} = \mathbf{b}, \qquad \text{т.е.} \qquad \mathbf{A}(\mathbf{y} = \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}.$$

Следователно разликата $\mathbf{u} = \mathbf{y}\mathbf{x}_0$ принадлежи на подпространството от решения U, откъдето получаваме

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u} \in \mathbf{x}_0 + U.$$

Остава да покажем, че ако рангът на $\mathbf{A}$ е r, то $\dim U = n - r$.

Като повторим разсъжденията от предната теорема получаваме еквивалентната система

$$\left|\begin{array}{cccccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1r}x_r & = & - & a_{1r+1}x_{r+1} & -\dots & -a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & \dots & + & a_{2r}x_r & = & - & a_{2r+1}x_{r+1} & -\dots & -a_{2n}x_n \\ \dots & . & \dots & \dots & \dots & . & \dots & \dots & . \dots & \dots \\ a_{r1}x_1 & + & \dots & + & a_{rr}x_r & = & - & a_{rr+1}x_{r+1} & -\dots & -a_{rn}x_n \end{array}\right. \tag{3.6.5}$$

Давайки на свободните неизвестни произволен набор от стойности определяме (еднозначно) съответните му стойности на x_1, $x_2, \dots, x_r$, така че получената n-торка е решение на хомогенната система.
Да разгледаме следните решения получени по описания начин:

$$\begin{array}{lcllllll} \mathbf{u}_1 & = & (u_{11}, & u_{12}, & \dots, & u_{1r}, & 1, \ 0, \ \dots, 0) \\ \mathbf{u}_2 & = & (u_{21}, & u_{22}, & \dots, & u_{2r}, & 0, \ 1, \ \dots, 0) \\ \mathbf{u}_{n-r} & = & (u_{n-r,1}, & u_{n-r,2}, & \dots, & u_{n-r,r}, & 0, \ 0, \ \dots, 1) \end{array}$$

Те са линейно независими (виж последните $n - r$ координати). Ще покажем, че всяко друго решение $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ на хомогенната система е тяхна линейна комбинация. Да вземем вектора

$$\mathbf{v} - v_{r+1}\mathbf{u}_1 - v_{r+2}\mathbf{u}_2 - \dots - v_n\mathbf{u}_{n-r} = (c_1, c_2, \dots, c_r, 0, 0, \dots, 0).$$

Той също е решение на $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ и като заместим в (3.6.5) получаваме $c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0$. Следователно

$$\mathbf{v} = v_{r+1}\mathbf{u}_1 + v_{r+2}\mathbf{u}_2 + \cdots + v_n\mathbf{u}_{n-r}$$

С това теоремата е доказана.

Дефиниция 3.6.7 ***Фундаментална система решения*** *на една хомогенна линейна система наричаме всеки базис на пространството от решенията ѝ.*

Пример 3.6.2 Да намерим фундаменталната система решения на хомогенната система

$$\left| \begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & 9x_4 & = 0 \end{array} \right.$$

Преобразуваме по редове матрицата на системата (При тези операции нулевият стълб от свободни членове в разширената матрица не играе никаква роля затова просто го изпускаме и разглеждаме матрицата на системата.)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

т.е. получаваме системата

$$\left| \begin{array}{cccccccc} x_1 & - & x_2 & + & & - & 5x_4 & = 0 \\ & & & & x_3 & + & 4x_4 & = 0 \end{array} \right. \qquad \text{т.е.} \qquad \left| \begin{array}{cccccc} x_1 & = & x_2 & + & 5x_4 \\ x_3 & = & & - & 4x_4 \end{array} \right.$$

Следователно решенията

$$\mathbf{u}_1 = (1,\ 1,\ 0,\ 0) \qquad \text{и} \qquad \mathbf{u}_2 = (5,\ 0,\ -4,\ 1)$$

образуват фундаментална система решения.

Теорема 3.6.8 *Нека $\mathbb{L}$ е крайномерно линейно пространство. За всяко подпространство $\mathbb{U}$ на $\mathbb{L}$ съществува хомогенна система линейни уравнения $\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, пространството от решения на която съвпада с $\mathbb{U}$. Всяко подмножество $M = \mathbf{a} + \mathbb{U}$ на $\mathbb{L}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{L}$, представлява съвкупността от решения на нехомогенната система $\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, където $\mathbf{b} = \boldsymbol{A}a$.*

Доказателство. Нека $\dim \mathbb{L} = n$. Фиксирайки някакъв базис в $\mathbb{L}$ всеки вектор ще се представя като n-орката от своите координати, т.е. можем да считаме, че $\mathbb{L} \equiv \mathbb{F}^n$.

Нека $\dim \mathbb{U} = r$ и един негов базис е

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{u}_1 & = & (u_{11}, & u_{12}, & \ldots, & u_{1n}) \\ \mathbf{u}_2 & = & (u_{21}, & u_{22}, & \ldots, & u_{2n}) \\ . & . & . & . & \ldots & . \\ \mathbf{u}_r & = & (u_{r,1}, & u_{r,2}, & \ldots, & u_{r,n}) \end{array} \tag{3.6.6}$$

В такъв случай съгласно Теорема 3.6.6 решенията на хомогенната система

$$\left| \begin{array}{llllllll} u_{11}x_1 & + & u_{12}x_2 & + \ldots & + & u_{1n}x_n & = 0 \\ u_{21}x_1 & + & u_{22}x_2 & + \ldots & + & u_{2n}x_n & = 0 \\ \ldots & . & \ldots & . \ldots & . & \ldots & \ldots \\ u_{r1}x_1 & + & u_{r2}x_2 & + \ldots & + & u_{rn}x_n & = 0 \end{array} \right. \tag{3.6.7}$$

образуват $n - r$ мерно пространство. Нека вземем един негов базис, т.е. една фундаментална система решения на (3.6.7):

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{a}_1 & = & (a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n}) \\ \mathbf{a}_2 & = & (a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n}) \\ . & . & . & . & \ldots & . \\ \mathbf{a}_{n-r} & = & (a_{n-r,1}, & a_{n-r,2}, & \ldots, & a_{n-r,n}) \end{array} \tag{3.6.8}$$

Следователно за всяко $i = 1, 2, \ldots, n - r$ е в сила

$$\left| \begin{array}{llllllll} u_{11}a_{i1} & + & u_{12}a_{i2} & + \ldots & + & u_{1n}a_{1n} & = 0 \\ u_{21}a_{i1} & + & u_{22}a_{i2} & + \ldots & + & u_{2n}a_{1n} & = 0 \\ \ldots & . & \ldots & . \ldots & . & \ldots & \ldots \\ u_{r1}a_{i1} & + & u_{r2}a_{i2} & + \ldots & + & u_{rn}a_{1n} & = 0 \end{array} \right. \tag{3.6.9}$$

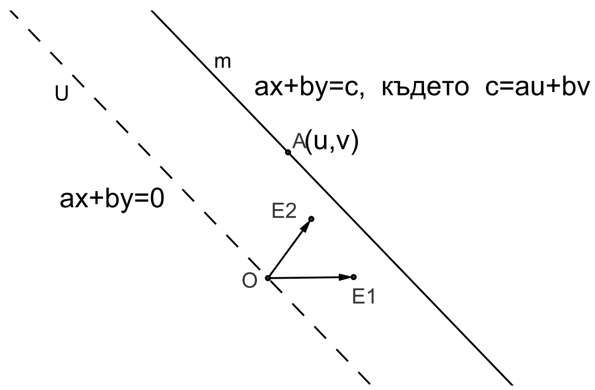
Но последното показва, че векторите $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$ са решения на хомогенната система $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, където

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-r\,1} & a_{n-r\,2} & \ldots & a_{n-r\,n} \end{pmatrix}$$

Рангът на матрицата $\mathbf{A}$ е $n - r$ и следователно фундаменталната система решения на $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ се състои от r вектора. Тъй като $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$ са линейно независими, то те образуват една фундаменталната система решения на $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.

Нека M е произволно подмножество на $\mathbb{L}$ и има вида $M = \mathbf{a} + \mathbb{U}$, където $\mathbf{a} \in \mathbb{L}$ и $\mathbb{U}$ е подпространство на $\mathbb{L}$. Съгласно току що доказаното съществува хомогенна система $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ с пространство от решения $\mathbb{U}$. Да положим $\mathbf{b} = \mathbf{Aa}$. Тогава $\mathbf{A}(\mathbf{a} + \mathbf{u}) = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}$, за всяко $\mathbf{u} \in \mathbb{U}$. Следователно векторите на M са решения на системата $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Но като вземем предвид, че и всяко нейно решение има вида $\mathbf{a} + \mathbb{U}$, където $\mathbf{u}$ е решение на $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, т.е. $\mathbf{u} \in \mathbb{U}$, получаваме, че M е точно съвкупността от решения на $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. С това теоремата е доказана.

Пример 3.6.3 В линейното пространство $\mathbb{R}^2(O)$ да вземем произволна права m неминаваща през O. Точките от тази права образуват подмножество $M = A + \mathbb{U}$, където A е точка от правата m, а $\mathbb{U}$ е линейното подпространство от точките на права през O успоредна на m. Съгласно предната теорема координатите на точките от m са решения на система с две неизвестни състояща се от едно уравнение, тъй като $\dim \mathbb{U} = 1$. С други думи координатите на точки на m образуват съвкупността от решения на уравнение от вида $ax + by = c$.



Фигура 3.13: ...

3.7 Координатни системи в равнината и пространството. Смяна на координатните системи.

Дефиниция 3.7.1 ***Координатна система*** $\mathcal{K}$ ***в равнината*** *наричаме всяка съвкупност от точка* O *и наредена двойка неколинеарни свободни вектори* $\boldsymbol{e}_1$ *и* $\boldsymbol{e}_2$ *в равнината. Бележим с* $\mathcal{K} = O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$*. Точката* O *се нарича* ***начало*** *на координатната система, а* $\boldsymbol{e}_1$ *и* $\boldsymbol{e}_2$ *-* ***базисни вектори****. Базисните вектори обикновено се вземат с еднаква дължина (най-често равна на единица).*

Очевидно координатната система $\mathcal{K} = O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ е еднозначно определена с началото O и точките E_1 и E_2, където $\overrightarrow{OE_1} = \boldsymbol{e}_1$ и $\overrightarrow{OE_2} = \boldsymbol{e}_2$. Това ни позволява да дадем следната еквивалентна дефиниция

Дефиниция 3.7.2 ***Координатна система в равнината*** *наричаме всяка наредена тройка* (O, E_1, E_2) *от неколинеарни точки в равнината.*

Двойките от началото и базисните вектори определят две пресичащи се оси $Ox = O\boldsymbol{e}_1$ и $Oy = O\boldsymbol{e}_2$, **които се наричат координатни оси**. Последното ни дава основание да казваме, че координатната система в равнината представлява двойка пресичащи се оси. Първата се нарича **абциса**, а втората **ордината**.

Базисните вектори $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ на координатната система $\mathcal{K} = O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ се явяват базис на линейното пространство от свободните вектори в равнината. Аналогично точките E_1 и E_2 са базис в линейното пространство $\mathbb{R}^2(O)$.

Всеки свободен вектор $\boldsymbol{a}$ има еднозначно определени координати (a_1, a_2) в базиса $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ зададени с равенството $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2$. От доказателството на Теорема ?? е ясно, че координатите a_1 и a_2 са точно алгебричните мерки на проекциите на $\boldsymbol{a}$ съответно върху абцисата и ординатата успоредно на другата ос (съответно на ординатата и абцисата). Двойката (a_1, a_2) наричаме **координати на вектора** $\boldsymbol{a}$ **в координатната система** $\mathcal{K} = O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$.

Аналогично, с всяка точка A в равнината също по естествен начин се свързва еднозначно определена двойка числа (a_1, a_2) - координатите на A в базиса E_1 и E_2 на , която се задава с равенството

$$\overrightarrow{OA} = a_1\overrightarrow{OE_1} + a_2\overrightarrow{OE_2} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2.$$

Аналогично тази двойка ще наричаме **координати на** A **в координатната система** $\mathcal{K} = O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ зададена в $\mathbb{R}^2(O)$.

Аналогично се дефинират координатна система и координати в пространството. Ето трите еквивалентни дефиниции.

Фигура 3.14: Координатни системи

Дефиниция 3.7.3 ***Координатна система*** $\mathcal{K}$ ***в пространството*** *наричаме всяка съвкупност от точка* O *и наредена тройка некомпланарни свободни вектори* $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ *и* $\boldsymbol{e}_3$ *в пространството. Бележим с* $\mathcal{K} = O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$. *Точката* O *се нарича* ***начало*** *на координатната система, а* $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ *и* $\boldsymbol{e}_3$ *-* ***базисни вектори****. Базисните вектори обикновено се вземат с еднаква дължина (най-често равна на единица).*

Дефиниция 3.7.4 ***Координатна система в пространството*** *наричаме всяка наредена четворка* (O, E_1, E_2, E_3) *от некомпланарни точки в пространството. Тази дефиниция съответства на интерпретация на пространството като линейното пространство* $\mathbb{R}^3(O)$. *Връзката с предишната дефиниция се дава с*

$$\boldsymbol{e}_1 = \overrightarrow{OE_1},\ \boldsymbol{e}_2 = \overrightarrow{OE_2},\ \boldsymbol{e}_3 = \overrightarrow{OE_3}.$$

Дефиниция 3.7.5 ***Координатна система в пространството*** *наричаме наредена тройка некомпланарни оси* $Ox = O\boldsymbol{e}_1$, $Oy = O\boldsymbol{e}_2$ *и* $Oz = O\boldsymbol{e}_3$ *пресичащи се в една точка* O. *Осите се наричат съответно* ***абциса, ордината и апликата****.*

Координати на точката A **в координатната система** $\mathcal{K} = O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ наричаме координатите на A в $\mathbb{R}^3(O)$ с базис E_1, E_2, E_3, а **координати на свободния вектор** $\boldsymbol{a}$ **в** $\mathcal{K}$ - координатите му спрямо базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ в пространството на свободните вектори.

Както вече отбелязахме всяка координатна система $\mathcal{K}$ задава базиси в пространството на свободните вектори и в $\mathbb{R}^3(O)$ ($\mathbb{R}^2(O)$). Веднага възниква въпросът : има ли връзка между координатите на свободния вектор $\boldsymbol{a}$ в базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ и координатите на началото и краят на неговите представители (насочените отсечки) в базиса определен от $\mathcal{K}$ в $\mathbb{R}^3(O)$. Отговорът се дава със следното твърдение

Твърдение 3.7.6 *Нека $\mathcal{K} = O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ е координатна система и $\boldsymbol{a}$ е свободен вектор в пространството. Ако $\overrightarrow{AB}$ е произволен представител на $\boldsymbol{a}$ с координати на началото и края съответно $A(a_1, a_2, a_3)$ и $B(b_1, b_2, b_3)$, то координатите на $\boldsymbol{a}$ в базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ са $(b_1 - a_1,\ b_2 - a_2,\ b_3 - a_3)$ (т.е. координатите на разликата на точките B и A в $\mathbb{R}^3(O)$). В частност координатите на $\boldsymbol{a}$ съвпадат с координатите на точката C, където $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{a}$.*

Доказателство. Съгласно дадените дефиниции на координати и свойствата на свободните вектори имаме

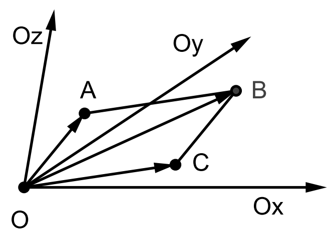
$$\overrightarrow{OA} = a_1\overrightarrow{OE_1} + a_2\overrightarrow{OE_2} + a_3\overrightarrow{OE_3} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3.$$

$$\overrightarrow{OB} = b_1\overrightarrow{OE_1} + b_2\overrightarrow{OE_2} + b_3\overrightarrow{OE_3} = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3.$$

Следователно

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b_1 - a_1)\boldsymbol{e}_1 + (b_2 - a_2)\boldsymbol{e}_2 + (b_3 - a_3)\boldsymbol{e}_3,$$

т.е. координатите на точка C в координатната система $\mathcal{K}$ са точно $(b_1 - a_1,\ b_2 - a_2,\ b_3 - a_3)$.



Фигура 3.15: Координати на вектор

Доказаното твърдение позволява да говорим за координати в $\mathcal{K}$ на насочена отсечка, а именно ***координати на*** $\overrightarrow{AB}$ дефинираме като тройката числа $(b_1 - a_1,\ b_2 - a_2,\ b_3 - a_3)$, получени като разлика на съответните координати на B и A.

Сега да преминем към въпроса: *Как се променят координатите на точките и свободните вектори в пространството (равнината) при смяна на координатната система*? За целта първо ще разгледаме по-общия случай как се променят координатите на векторите в произволно линейно пространство.

Нека $\mathbb{L}$ е линейно пространство и $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \dots,\ \boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{e}'_1,\ \boldsymbol{e}'_2,\ \dots,\ \boldsymbol{e}'_n$ са два негови базиса. Нека векторът $\boldsymbol{a} \in \mathbb{L}$ има съответно координати $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $(a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$ в двата базиса, т.е.

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \dots + a_n\boldsymbol{e}_n = a'_1\boldsymbol{e}'_1 + a'_2\boldsymbol{e}'_2 + \dots + a'_n\boldsymbol{e}'_n.$$

Да означим с $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^\tau$ и $\mathbf{a}' = (a'_1, a'_2, \dots, a'_n)^\tau$ съответно стълбовете от координати на $\boldsymbol{a}$ в двата базиса.

За краткост при записванията по-нататък в изложението ще използваме матрици, чиито елементи не са числа, а вектори на линейното пространство. Всеки читател може да съобрази веднага, че дефинираните в параграф 2.? действия с числови матрици се пренасят без изменение и за матрици, чиито елементи са вектори (или едната матрица е такава), но при едно условие: операциите между матричните елементи (числа или вектори), до които водят тези действия да са изпълними. (Например засега не можем да умножим две матрици от вектори, тъй като не сме дефинирали умножение на вектори от линейното пространство.)

Следвайки горереказаното да означим с $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}'$ стълбовете от базисните вектори. Тогава можем да запишем:

$$\boldsymbol{a} = \mathbf{a}^\tau\mathbf{e} = (a_1, a_2, \dots, a_n)\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{e}_n\end{pmatrix} = (a'_1, a'_2, \dots, a'_n)\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}'_1\\ \boldsymbol{e}'_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{e}'_n\end{pmatrix} = (\mathbf{a}')^\tau\mathbf{e}'.$$

Векторите $\boldsymbol{e}'_1,\ \boldsymbol{e}'_2,\ \dots,\ \boldsymbol{e}'_n$ се изразяват по единствен начин (защо) като линейна комбинация на базисните вектори $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \dots,\ \boldsymbol{e}_n$ и нека това се дава с равенствата

$$\left|\begin{array}{ccccccccc}\boldsymbol{e}'_1 & = & t_{11}\boldsymbol{e}_1 & + & t_{21}\boldsymbol{e}_2 & + & \dots & + & t_{n1}\boldsymbol{e}_n\\ \boldsymbol{e}'_2 & = & t_{12}\boldsymbol{e}_1 & + & t_{22}\boldsymbol{e}_2 & + & \dots & + & t_{n2}\boldsymbol{e}_n\\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{e}'_n & = & t_{n1}\boldsymbol{e}_1 & + & t_{n2}\boldsymbol{e}_2 & + & \dots & + & t_{nn}\boldsymbol{e}_n\end{array}\right. \tag{3.7.1}$$

Дефиниция 3.7.7 *Матрицата*

$$\underline{T} = \begin{pmatrix}t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n}\\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn}\end{pmatrix}$$

определена от равенствата (3.7.1) наричаме ***матрица на прехода от базиса*** $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \dots,\ \boldsymbol{e}_n$ ***към базиса*** $\boldsymbol{e}'_1,\ \boldsymbol{e}'_2,\ \dots,\ \boldsymbol{e}'_n$

Дефиницията показва, че матрицата на прехода се получава като се запишат като стълбове координатите на векторите от втория базис $\boldsymbol{e}'_1,\ \boldsymbol{e}'_2,\ \dots,\ \boldsymbol{e}'_n$ спрямо първия базис. Трябва да отбележим, че **всяка матрица на прехода от един базис към друг е неособена**. Противното, т.е. $\det \mathbf{T} = 0$ влече $\operatorname{rank}(\mathbf{T}) < n$ и следователно наличието на линейна зависимост между стълбовете на $\mathbf{T}$. Последното означава, че $\boldsymbol{e}'_1,\ \boldsymbol{e}'_2,\ \dots,\ \boldsymbol{e}'_n$ са линейно зависими, което е противоречие.

В матричен запис равенства (3.7.1) имат вида

$$\mathbf{e}' = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}'_1 \\ \boldsymbol{e}'_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}'_n \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{\tau}\mathbf{e} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} & \dots & t_{n1} \\ t_{12} & t_{22} & \dots & t_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{1n} & t_{2n} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix} \tag{3.7.2}$$

Тогава за връзката между координатите на вектора $\boldsymbol{a}$ в двата базиса получаваме:

$$\mathbf{a}^{\tau}\mathbf{e} = \boldsymbol{a} = (\mathbf{a}')^{\tau}\mathbf{e}' = (\mathbf{a}')^{\tau}\mathbf{T}^{\tau}\mathbf{e} = (\mathbf{T}\mathbf{a}')^{\tau}\mathbf{e}.$$

Следователно

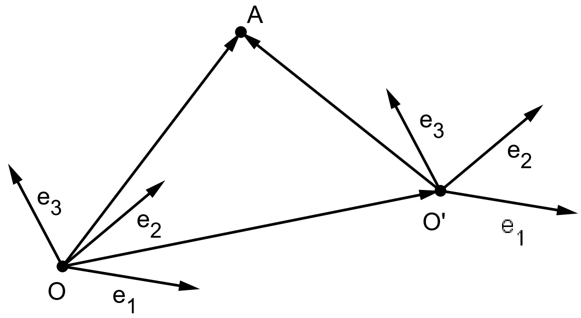
$$(\mathbf{a} - \mathbf{T}\mathbf{a}')^{\tau}\mathbf{e} = \mathbf{0}.$$

Линейната независимост на векторите $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \dots,\ \boldsymbol{e}_n$ ни дава, че всеки ред на матрицата $\mathbf{a} - \mathbf{T}\mathbf{a}'$ трябва да е нулев, т.е. тя трябва да е нулевата матрица. Следователно

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \mathbf{T}\mathbf{a} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix} \tag{3.7.3}$$

Нека $\mathcal{K} = O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ и $\mathcal{K}' = O'\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ са две координатни системи в пространството, които се различават само по началото си. В такъв случай произволен свободен вектор има еднакви координати в $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}'$, а именно координатите му спрямо базиса $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3$ в пространството от свободните вектори. Една точка, обаче, има различни координати в двете координатни системи. Да намерим каква е връзката между тях. Нека точката A има координати (x, y, z) в $\mathcal{K}$ и (x', y', z') в $\mathcal{K}'$, т.е.

$$\overrightarrow{OA} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 \qquad \text{и} \qquad \overrightarrow{O'A} = x'\boldsymbol{e}_1 + y'\boldsymbol{e}_2 + z'\boldsymbol{e}_3$$



Фигура 3.16: Смяна на координатната система

Нека O' има координати $\mathbf{a}^\tau = (a, b, c)$ в $\mathcal{K}$. Вземайки предвид равенството $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A}$ получаваме, че

$$\left| \begin{array}{lcl} x & = & x' + a \\ y & = & y' + b \\ z & = & z' + c \end{array} \right. \tag{3.7.4}$$

или в матричен запис

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{a}, \tag{3.7.5}$$

където $\mathbf{x}$. $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{a}$ са стълбовете от координати на A в $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}'$, и на O' в $\mathcal{K}$, съответно.

Сега да разгледаме общия случай, когато имаме две произволни координатни системи. Нека това са $\mathcal{K} = O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ и $\mathcal{K}' = O'\boldsymbol{e}'_1\boldsymbol{e}'_2\boldsymbol{e}'_3$, където $\mathbf{a}^\tau = (a, b, c)$ са координатите на O' в $\mathcal{K}$ и

$$\underline{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32}3 & t_{33} \end{pmatrix}$$

е матрицата на прехода от базиса $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3$ към базиса $\boldsymbol{e}'_1,\ \boldsymbol{e}'_2,\ \boldsymbol{e}'_3$. Връзката между координатите (a_1, a_2, a_3) и (a'_1, a'_2, a'_3) на свободния вектор $\boldsymbol{a}$ в $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}'$ се дават съгласно горе доказаното с

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix}. \tag{3.7.6}$$

За да получим връзката между координатите $\mathbf{x}^\tau = (x, y, z)$ в $\mathcal{K}$ и $\mathbf{x}' = (x', y', z')$ в $\mathcal{K}'$ на точка A да разгледаме координатната система $\mathcal{K}^* =$

$O\boldsymbol{e}_1'\boldsymbol{e}_2'\boldsymbol{e}_3'$. Нека с $\mathbf{u}^\tau = (u, v, w)$ означим координатите на A в $\mathcal{K}^*$. Съгласно (3.7.6) и (3.7.5) са в сила равенствата

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{u}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{T}\mathbf{a}', \quad \mathbf{u} = \mathbf{x}' + \mathbf{a}',$$

където $\mathbf{a}'$ са координатите на O' в $\mathcal{K}^*$. Следователно

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}(\mathbf{x}' + \mathbf{a}') = \mathbf{T}\mathbf{x}' + \mathbf{T}\mathbf{a}' = \mathbf{T}\mathbf{x}' + \mathbf{a}.$$

Предоставяме на читателите да проверят, че същия резултат се получава и когато използваме координатната система $O'\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ като междинна, т.е. сменим първо началото, а после базисните вектори.

И така връзката между координатите $\mathbf{x}^\tau = (x, y, z)$ в $\mathcal{K}$ и $\mathbf{x}' = (x', y', z')$ в $\mathcal{K}'$ на точка A се дава с формулите

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \tag{3.7.7}$$

В равнинния случай формулите очевидно остават същите, като отпада координатата z.