Глава 4

Прави и равнини

4.1 Уравнение на права в равнината. Взаимни положения на две прави.

Нека в равнината е фиксирана координатна система $\mathcal{K} = O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$, $|\boldsymbol{e}_1| = |\boldsymbol{e}_2| = 1$.

Теорема 4.1.1 *Точката $M(x, y)$ лежи на правата g тогава и само тогава, когато координатите ѝ удовлетворяват равенствата*

$$\left| \begin{array}{ccccc} x & = & x_0 & + & at \\ y & = & y_0 & + & bt \end{array} \right., t \in \mathbb{R}, \tag{4.1.1}$$

където $M_0(x_0, y_0)$ е точка от правата g, а $\overrightarrow{g}(a, b)$ е вектор колинеарен с нея.

Доказателство.

Уравнение от вида (4.1.1) се нарича ***параметрично уравнение на правата*** g.

Теорема 4.1.2 *Точката $M(x, y)$ лежи на правата g тогава и само тогава, когато координатите ѝ удовлетворяват уравнение от вида*

$$Ax + By + C = 0, \quad (A, B) \neq (0, 0). \tag{4.1.2}$$

където векторът с координати $(B, -A)$ е коалиниарен с правата g. Такъв е и всеки вектор, чиито координати удовлетворяват $Ax + By = 0$.

Доказателство.

Уравнение от вида (4.1.2) се нарича ***общо уравнение на правата*** g.

Уравнение на права през две точки.

Нека $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$ са две точки и g е правата, която задават. $M(x, y) \in g$ тогава и само тогава, когато $\overrightarrow{A_1M} = t\overrightarrow{A_1A_2}$, т.е. когато

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{4.1.3}$$

Еквивалентен запис (при който се избягва появата на нула в знаменател) е

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \tag{4.1.4}$$

Ако уравнение (4.1.2) се запише във вида (при $b \neq 0$)

$$y = kx + n,$$

то в декартова координатна система коефициентът k има геометричен смисъл: $k = \tan\varphi$, където φ е ъгълът, който правата сключва с абцисната ос. Този вид на общото уравнение на права е удобен за запис на уравнението на допирателна към графиката на функция $f(x)$ в точката $(a, f(a))$. В този случай $k = f'(a)$.

Следвайки горното уравнението на права през две точки може да се запише във вида

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1} \qquad \text{или} \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \tag{4.1.5}$$

Взаимни положения на две прави.

Теорема 4.1.3 *Нека са дадени правите*

$$\begin{array}{rrcl} g_1: & A_1x + B_1y + C_1 & = & 0 \\ g_2: & A_2x + B_2y + C_2 & = & 0 \end{array}$$

Изпълнено е едно от следните три взаимни положения на g_1 и g_2:

1. $g_1 \equiv g_2 \;\Leftrightarrow\; (A_1, B_1, C_1)$ *и* (A_2, B_2, C_2) *са пропорционални;*

2. $g_1 || g_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$, *но* $\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0$;

3. $g_1 \cap g_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Доказателство.

4.2 Уравнение на равнина в пространството. Взаимни положения на две равнини.

Нека в пространството е фиксирана координатна система $\mathcal{K} = O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$, $|\boldsymbol{e}_1| = |\boldsymbol{e}_2| = |\boldsymbol{e}_3| = 1$.

Теорема 4.2.1 *Точката $M(x,y,z)$ лежи в равнината α тогава и само тогава, когато координатите ѝ удовлетворяват равенствата*

$$\left| \begin{array}{ccccccc} x & = & x_0 & + & a_1 t & + & a_2 s \\ y & = & y_0 & + & b_1 t & + & b_2 s \\ z & = & z_0 & + & c_1 t & + & c_2 s \end{array} \right. , \quad t, s \in \mathbb{R}, \tag{4.2.1}$$

където $M_0(x_0, y_0, z_0)$ е точка от равнината α, а $\overrightarrow{u}(a_1, b_1, c_1)$ и $\overrightarrow{v}(a_2, b_2, c_2)$ са вектори ккомпланарни с α, но не са колинеарни.

Доказателство.

Уравнение от вида (4.2.1) се нарича ***параметрично уравнение на равнина в пространството*** g.

Теорема 4.2.2 *Точката $M(x,y,z)$ лежи в равнината α тогава и само тогава, когато координатите ѝ удовлетворяват равенствата*

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (A, B, C) \neq (0, 0, 0) \tag{4.2.2}$$

за подходящи A, B, Cкъдето всеки два неколиниарни вектора,чиито координати удовлетворяват $Ax + By + Cz = 0$ задават α (В частност кои да е два измежду $(B, -A, 0)$, $(C, 0, -A)$, $(0, C, -B)$)

Доказателство.

Уравнение от вида (4.2.2) се нарича ***общо уравнение*** на равнината α.

Уравнение на равнина през три точки.

Нека $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$. Точката $M(x, y, z)$ лежи в равнината α тогава и само тогава, когато векторите $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ са линейно зависими, т.е когато

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0 \tag{4.2.3}$$

Уравнението (4.2.3) се нарича ***уравнение на равнина през три точки***.

Взаимни положения на две прави.

Теорема 4.2.3 *Нека са дадени равнините*

$$\begin{array}{rlcl} \alpha: & A_1x + B_1y + C_1z + D_1 & = & 0 \\ \beta: & A_2x + B_2y + C_2z + D_2 & = & 0 \end{array}$$

Изпълнена е една от следните три възможности:

1. $\alpha \equiv \beta \;\Leftrightarrow\; (A_1, B_1, C_1, D_1)$ *и* (A_2, B_2, C_2, D_2) *са пропорционални;*
2. $\alpha || \beta \;\Leftrightarrow\; \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$;
3. $\alpha \cap \beta \;\Leftrightarrow$ *рангът на* $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ *е равен на 2.*

Доказателство.

4.3 Уравнение на права в пространството. Взаимни положения на две прави.

Нека в пространството е фиксирана координатна система $\mathcal{K} = O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$, $|\boldsymbol{e}_1| = |\boldsymbol{e}_2| = |\boldsymbol{e}_3| = 1$.

Теорема 4.3.1 *Точката $M(x,y,z)$ лежи на правата g тогава и само тогава, когато координатите ѝ удовлетворяват равенствата*

$$\left|\begin{array}{lllll} x & = & x_0 & + & at \\ y & = & y_0 & + & bt \\ z & = & z_0 & + & ct \end{array}\right. , \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4.3.1}$$

където $M_0(x_0, y_0, z_0)$ е точка от правата g, а $\overrightarrow{g}(a,b,c)$ е вектор колинеарен с g.

Доказателство.

Уравнение от вида (4.3.1) се нарича ***параметрично уравнение*** на правата g.

Теорема 4.3.2 *Координатите на всяка точката $M(x,y,z)$ от правата g удовлетворяват системата линейни уравнения*

$$\left|\begin{array}{lllllllll} A_1x & + & B_1y & + & C_1z & + & D_1 & = 0 \\ A_2x & + & B_2y & + & C_2z & + & D_2 & = 0 \end{array}\right. , \tag{4.3.2}$$

за подходящи непропорционални (A_1, B_1, C_1, D_1) и (A_2, B_2, C_2, D_2). Обратно всяко решение (x,y,z) на (4.3.2) дава координатите на точка от g. Правата g е успоредна на правата g_0 зададена със съответната на (4.3.2) хомогенна система, а всеки вектор, чиито координати удолетворяват тази хомогенна система, в частност векторът $\overrightarrow{g}$ с координати

$$\overrightarrow{g} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \; -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right)$$

е вектор колинеарен с g.

Доказателство.

Уравнение от вида (4.3.2) се нарича ***общо уравнение*** на правата g.

Уравнение на права през две точки.

Нека $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$. Точката $M(x,y,z)$ лежи на правата AB тогава и само тогава, когато векторите $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AB}$ са колинеарни, т.е. координатите на M удовлетворяват

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}. \tag{4.3.3}$$

Всеки две от горните три равенства задават общо уравнение на правата, а ако положим всяка от трите дроби (те са равни) за t ще получим параметрично уравнение. Но самото уравнение (4.3.3) дава достатъчно информация за правата.

Сноп равнини

Нека е дадена права

$$g: \left| \begin{array}{ccccccccc} A_1x & + & B_1y & + & C_1z & + & D_1 & =0 \\ A_2x & + & B_2y & + & C_2z & + & D_2 & =0 \end{array} \right. ,$$

Сноп равнини наричаме съвкупността от всички равнини през правата g. Уравнението на всяка равнина от снопа се дава с уравнението

$$t(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + s(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \tag{4.3.4}$$

за подходящи $t, s \in \mathbb{R}$.
В уравнението участват два параметъра, но реално е един (можем да разделим уравнението на единия от тях). Използва се даденият хомогенен вид за да не се изпуснат екстремните случаи, когато единият параметър е нула.

Взаимни положения на две прави в пространството.

Нека g_1 и g_2 са две прави зададени с

$$g_1: \left| \begin{array}{ccccccccc} A_1x & + & B_1y & + & C_1z & + & D_1 & =0 \\ A_2x & + & B_2y & + & C_2z & + & D_2 & =0 \end{array} \right. ,$$

$$g_2: \left| \begin{array}{ccccccccc} A_3x & + & B_3y & + & C_3z & + & D_3 & =0 \\ A_4x & + & B_4y & + & C_4z & + & D_4 & =0 \end{array} \right. ,$$

Разглеждаме системата от 4 уравнения с три неизвестни

$$\left| \begin{array}{ccccccccc} A_1x & + & B_1y & + & C_1z & + & D_1 & =0 \\ A_2x & + & B_2y & + & C_2z & + & D_2 & =0 \\ A_3x & + & B_3y & + & C_3z & + & D_3 & =0 \\ A_4x & + & B_4y & + & C_4z & + & D_4 & =0 \end{array} \right. ,$$

Нека $\mathbf{A}$ и $\bar{\mathbf{A}}$ са матрицата и разширената матрица на горната система. Тогава:

1. Ако $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = \operatorname{rank}(\bar{\mathbf{A}}) = 2$, то $g_1 \equiv g_2$;

2. Ако $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = 2,\ \operatorname{rank}(\bar{\mathbf{A}}) = 3$, то $g_1 || g_2$ - успоредни;
3. Ако $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = \operatorname{rank}(\bar{\mathbf{A}}) = 3$, то $g_1 \cap g_2$ - една обща точка;
4. Ако $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = 3,\ \operatorname{rank}(\bar{\mathbf{A}}) = 4$, то g_1 и g_2 са *кръстосани*, т.е. нямат обща точка, но не са успоредни.