Глава 5

Евклидови и унитарни пространства

5.1 Скаларно произведение на свободни вектори. Декартова координатна система.

Дефиниция 5.1.1 *Нека* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *са два свободни вектора в равнината или пространството.* ***Скаларно произведение*** *на* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$*, което бележим с* $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}$*, наричаме реалното число определено с*

$$\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\varphi = |\boldsymbol{a}|np_a\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|np_b\boldsymbol{a},$$

където φ *е елементарно-геометричният ъгъл между двата вектора.*

Свойства на скаларното произведение .

Твърдение 5.1.2 *В сила са*

1. $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}.\boldsymbol{a}$ *(комутативен закон);*
2. $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ *(дистрибутивен закон);*
3. $(\lambda\boldsymbol{a}).\boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}.(\lambda\boldsymbol{b})$*;*
4. $\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{a}.\boldsymbol{a} > 0$ *за* $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{o}$*;*
5. $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ *или поне един от векторите* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *е нулев.*

Горните свойства са непосредствено следствие от дефиницията на скаларно произведение и проверката им оставяме на читателя.

Вектор $\boldsymbol{a}$ с дължина единица се нарича ***нормиран*** и очевидно $\boldsymbol{a}^2 = 1$.

Дефиниция 5.1.3 *Координатна система $\mathcal{K} = O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ (съответно $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ в равнината), чиито базисни вектори са два по два перпендикулярни (ползва се и терминът* ***ортогонални****) и нормирани, т.е.*

$$\boldsymbol{e}_i.\boldsymbol{e}_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0 & i \neq j, \end{cases} \quad , \quad i, j = 1, 2, 3,$$

се нарича ***декартова координатна система****.*

Декартовата координатна система позволява лесно пресмятане на скаларните произведения и затова е предпочитана при избор на координатна система в равнината или пространството.

Нека (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3) са координатите на векторите $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в декартовата координатна система $\mathcal{K} = O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$. Тогава

$$\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = a_1b_1\boldsymbol{e}_1^2 + a_2b_2\boldsymbol{e}_2^2 + a_3b_3\boldsymbol{e}_3^2 = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3,$$

тъй като произведенията на различни базисни вектори са нули. И така получихме следното твърдение

Твърдение 5.1.4 *При декартова координатна система в пространството (съответно равнината) е в сила*

$$\begin{array}{rclcrcl} \boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} & = & a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3, & \text{съответно} & \boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} & = & a_1b_1 + a_2b_2 \\ \boldsymbol{a}^2 & = & \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, & & \boldsymbol{a}^2 & = & \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \end{array} ,$$

където $\boldsymbol{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\boldsymbol{b}(b_1, b_2, b_3)$. Ъгълът между $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ се дава с

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$$

Нека в равнината е зададена декартова координатна система $\mathcal{K} = O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$, такава че завъртайки вектора $\boldsymbol{e}_1$ в посока обратна на часовниковата стрелка до съвпадането му с $\boldsymbol{e}_2$ той описва ъгъл $90°$. Нека $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ е произволен ненулев вектор. Всички перпендикулярни на $\boldsymbol{a}$ вектори са пропорционални на $\boldsymbol{a}^\perp = (-a_2, a_1)$, тъй като техните координати удовлетворяват уравнението $a_1x + a_2y = 0$. Векторът $\boldsymbol{a}^\perp$ има дължината на $\boldsymbol{a}$ и се получава като се завърти $\boldsymbol{a}$ на $90°$ в посока обратно на часовниковата стрелка. Ако завъртим $\boldsymbol{a}$ по часовниковата стрелка на $90°$ ще получим $-\boldsymbol{a}^\perp = (a_2, -a_1)$.

Нека в равнината с въведена декартова координатна система е дадена права g с уравнение

$$g: \quad ax + by + c = 0.$$

В този случай **коефициентите пред x и y имат следния геометричен смисъл**: векторът $\boldsymbol{h}(a,b)$ е перпендикулярен на правата. Наистина скаларното произведение $\boldsymbol{hg} = a(-b) + ba = 0$.

Аналогично, ако в пространството е зададена декартова координатна система векторът $\boldsymbol{h}(A,B,C)$ е перпендикулярен на равнината с уравнение

$$\alpha : \quad Ax + By + Cz + D = 0.$$

5.1.1 Лице на успоредник при декартова координатна система в равнината.

Нека $\mathcal{K} = O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ е декартова и векторите $\boldsymbol{a}(a_1,a_2)$ и $\boldsymbol{b}(b_1,b_2)$ сключват ъгъл φ. За лицето S_{ab} на успоредника определен от двата вектора имаме

$$S_{ab} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\varphi = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\varphi - \frac{\pi}{2})$$

Произведението

$$|\boldsymbol{b}|\sin\varphi = |\boldsymbol{b}|\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = |\boldsymbol{b}|\cos(\varphi - \frac{\pi}{2})$$

представлява проекцията на $\boldsymbol{b}$ върху вектор перпендикулярен на $\boldsymbol{a}$. Следователно S_{ab} можем да го интерпретираме като скаларно произведение на $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}^{\perp}$ със свойството

$$\boldsymbol{a}^{\perp} \perp \boldsymbol{a} \quad \text{и} \quad |\boldsymbol{a}^{\perp}| = |\boldsymbol{a}|.$$

Векторът с горните свойства е определен еднозначно с точност до знак, т.е. същесвуват точно два вектора с това свойство:

$$\boldsymbol{a}^{\perp} = (-a_2, a_1) \quad \text{и} \quad -\boldsymbol{a}^{\perp} = (a_2, -a_1).$$

Тъй като лицето е положително число, то

$$S_{ab} = |\boldsymbol{a}^{\perp}.\boldsymbol{b}| = |-b_1a_2 + b_2a_1| = |\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}|$$

5.1.2 Ъгъл между права и равнина.

Нека в декартовата коорданатна система $\mathcal{K} = O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ са дадени уравненията на равнина

$$\alpha : \quad AX + By + Cz + D = 0$$

и права

$$g : \left| \begin{array}{ll} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 & = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 & = 0 \end{array} \right. ,$$

която пробожда α в точка G. Да означим с φ ъгълът между g и α, т.е. между g и проекцията ѝ върху α. За да определим φ е достатъчно да определим $\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$, който представлява ъгъла между g и перпендикуляр към равнината α. Вектор перпендикулярен на α е $\boldsymbol{h}(A, B, C)$ и следователно

$$\sin\varphi = \cos\psi = \frac{\boldsymbol{h}.\boldsymbol{g}}{|\boldsymbol{h}||\boldsymbol{g}|},$$

където $\boldsymbol{g}$ е вектор колинеарен с правата g. Един такъв вектор е

$$\boldsymbol{g}\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \; - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right).$$

Следователно

$$\boldsymbol{h}.\boldsymbol{g} = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

При изчисляване на ъгъла вземаме абсолютната стойност на горната детерминанта за да получим острия ъгъл между правата и равнината.

5.2 Нормални уравнения на права и равнина. Разстояние от точка до права и от точка до равнина.

Нека в равнината (пространството) е въведена декартова координатна система. Да разгледаме произволна права g с уравнение

$$g : \quad ax + by + c = 0.$$

Съгласно казаното по-горе

$$\boldsymbol{n}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

е вектор перпендикулярен на правата и с дължина единица. Нарича се нормален на g вектор.

Дефиниция 5.2.1 *Уравнението*

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=0$$

*се нарича **нормално уравнение** на правата g.*

Нормалното уравнение на права е едно общо уравнение и причината да се разглежда специално е следния факт.

Твърдение 5.2.2 *Ако $M_0(x_0, y_0)$ е произволна точка в равнината, то разстоянието d от нея до правата g се дава с*

$$d=\left|\frac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|.$$

В пространството ситуацията е аналогична. Нека е дадена равнина с уравнение (в декартова координатна система)

$$\alpha: \quad AX+By+Cz+D=0$$

Дефиниция 5.2.3 *Уравнението*

$$\frac{AX+By+Cz+}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0$$

*се нарича **нормално уравнение** на равнината α.*

Векторът

$$\boldsymbol{n}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)$$

е нормален на α вектор.

Твърдение 5.2.4 *Ако $M_0(x_0, y_0, z_0)$ е произволна точка в пространството, то разстоянието d от нея до равнината α се дава с*

$$d=\left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|.$$

5.3 Векторно произведение на два вектора. Смесено произведение на три вектора. Лице на триъгълник и обем на паралепипед.

Дефиниция 5.3.1

Дефиниция 5.3.2 ***Векторно произведение*** *на свободните вектори* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$*, сключващи ъгъл* φ *помежду си, наричаме вектор* $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ *дефиниран с*

1 $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\varphi = S_{\boldsymbol{ab}}$*, лицето на успоредника зададен от* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$*.*

2 $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{b}$,

3 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ *е дясна тройка.*

Свойства на векторното произведение:

1. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ (антикомутативност)
2. $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$
3. $(\lambda\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \times (\lambda\boldsymbol{b})$
4. $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{ac}).\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{bc}).\boldsymbol{a}$
5. $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} + (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = 0$ (тъждество на Якоби)
6. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$ тогава и само тогава, когато $\boldsymbol{a}$ колинеарен с $\boldsymbol{b}$.

Дефиниция 5.3.3 *Координатната ситема* $\mathcal{K} = O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ *е* ***дясно ориентирана,*** *ако базисните вектори* $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ *образуват дясна тройка вектори. Пространство със зададена дясна координатна система наричаме* ***положително ориентирано****.*

Ако една декартова координатна система е дясно ориентирана, то дефиницията на векторно произведение ни дава, че

$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3, \qquad \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1, \qquad \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2.$$

По традиция в тази случай се ползва означението $\mathcal{K} = O\boldsymbol{ijk}$, т.е.

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}, \qquad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}.$$

Твърдение 5.3.4 *Ако в дясна декартова координатна система* $\boldsymbol{a}(a_1, a_2, a_3)$ *и* $\boldsymbol{b}(b_1, b_2, b_3)$*, то*

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}.$$

Дефиниция 5.3.5 ***Смесено произведение*** $\boldsymbol{abc}$ *на три вектора* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ *и* $\boldsymbol{c}$ *наричаме*

$$\boldsymbol{abc} \stackrel{\text{def}}{=} (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}.$$

Твърдение 5.3.6 *Ако в дясна декартова координатна система* $\boldsymbol{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b}(b_1, b_2, b_3)$ *и* $\boldsymbol{c}(c_1, c_2, c_3)$*, то*

$$\boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Твърдение 5.3.7 *В дясна декартова координатна система*

$$\boldsymbol{abc} = \begin{cases} V, & \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \text{ са дясна тройка} \\ -V & \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \text{ са лява тройка} \end{cases},$$

където V *е обемът на паралепипеда образуван от векторите* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$.

Следствие 5.3.8 *Обемът на тетраедъра образуван от три некомпланарни вектора* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ *е*

$$V = |\frac{1}{6}\boldsymbol{abc}|.$$

Пример 5.3.1 Даден е тетраедър с върхове $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,6)$, $D(2,3,8)$. Да се определи обемът на тетраедъра и височината през върха D.

Решение. Тетраедърът е образуван от векторите $\overrightarrow{AB}(-2,3,0)$, $\overrightarrow{AC}(-2,0,6)$ и $\overrightarrow{AD}(0,3,8)$. Тогава

$$V = \frac{1}{6}|\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 8 \end{vmatrix}| = 14.$$

Ако с S означим лицето на страната ΔABC и с h търсената дължина на височината спусната от D, то $V = \frac{1}{3}Sh$. За лицето S имаме

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix}| = \frac{1}{2}|18\boldsymbol{i} + 12\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}| = 3\sqrt{14}.$$

Следователно
$$h = \frac{3V}{S} = \frac{3.14}{3\sqrt{14}} = \sqrt{14}.$$

Пример 5.3.2 Нека е дадена координатна система $\mathcal{K} = \boldsymbol{Oij}$, такава че ъгълът от $\boldsymbol{i}$ към $\boldsymbol{j}$ мерен обратно на часовниковата стрелка е $90°$. Даден е ΔABC с върхове $A(3,2)$, $B(-1,-1)$ и $C(5,-7)$ (координатите са спрямо $\mathcal{K}$). Във върха C е приложена сила $\overrightarrow{F}_1$ с $|\overrightarrow{F}_1| = 20$ и сключваща ъгъл $120°$ с абцисата, а във върха B е приложена сила $\overrightarrow{F}_2$ с $|\overrightarrow{F}_2| = 15$ и сключваща ъгъл $270°$ с абцисата. (Ъглите се мерят от абцисата в положителна посока, т.е. обратно на часовниковата стрелка.) В каква посока (по часовниковата стрелка или обратно) ще се завърти триъгълника около върха A? Каква е стойността на момента на въртене?

Решение. Равнината на триъгълника разглеждаме като координатната равнина $\boldsymbol{Oij}$ в дясната декартова координатна система $\mathcal{K}' = \boldsymbol{Oijk}$. При зададения избор на $\mathcal{K}$ векторът $\boldsymbol{k}$ сочи от чертежа към нас. В такъв случай, ако моментът $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}$ е еднопосочен с $\boldsymbol{k}$ (алгебричната му мярка е положително число), то той съответства на въртене в положителна посока (обратно на часовника). Ако моментът е $\lambda\boldsymbol{k}$ за $\lambda < 0$, то въртенето е по посока на часовниковата стрелка. (Напомняме, че $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}$ е дясна тройка.)
В $\mathcal{K}'$ $A(3,2,0)$, $B(-1,-1,0)$ и $C(5,-7,0)$. Следователно $\overrightarrow{AB}(-4,-3,0)$ и $\overrightarrow{AC}(2,-9,0)$.
За координатите на силите имаме:
$$\begin{array}{lll} \overrightarrow{F}_1(20\cos 120°,\ 20\sin 120°), & \text{т.е.} & \overrightarrow{F}_1(-10, 10\sqrt{3}); \\ \overrightarrow{F}_2(15\cos 270°,\ 15\sin 270°), & \text{т.е.} & \overrightarrow{F}_2(0,-15) \end{array},$$

което дава $\overrightarrow{F}_1(-10, 10\sqrt{3}, 0)$ и $\overrightarrow{F}_2(0,-15,0)$ в $\mathcal{K}'$.

Следователно за момента имаме

$$M = \overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{F}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -9 & 0 \\ -10 & 10\sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -4 & -3 & 0 \\ 0 & -15 & 0 \end{vmatrix} = 10(2\sqrt{3}-3)\boldsymbol{k}.$$

Тъй като алгебричната мярка $10(2\sqrt{3}-3) > 0$, то посоката на въргене е обратно на часовниковата стрелка.

5.4 Евклидови и унитарни пространства. Изоморфизъм. Ортогонализация по метода на Грам-Шмид

5.5 Детерминанта на Грам. Неравенства на Коши-Буняковски и на триъгълника.

5.6 Директна сума на подпространства.

5.7 Ортогонално допълнение. Спускане на перпендикуляр към подпространство.