

Задачи по механика с Matlab

Николай Манев

1 Център на тежестта на равнинна фигура и редукция на система съравнинни сили

Масата (лицето) и центърът на тежестта на съставна равнинна фигура се намира с функцията `masscenter(v1,v2,...)`, където всеки аргумент е 1×3 вектор $[m_i \ x_i \ y_i]$. Първата координата е масата (т.е. лицето), (x_i, y_i) е центърът на тежестта. Ако някоя от съставлящите фигури представя изрязана част, то в съответния ѝ аргумент масата се взема с отрицателен знак.

Ето и скриптът задаващ горната функция:

```
function [mass P]=masscenter(varargin)
mass=0; P=zeros(1,2);
for i=1:nargin
    mass=mass+varargin{i}(1);
    P=P+varargin{i}(1)*[varargin{i}(2) varargin{i}(3)];
end;
P=P/mass; %център на тежестта
end;
```

Сложните фигури се представят като обединение на триъгълници, правоъгълници и кръгове. Лицето на кръг се дава с πr^2 , а центърът на тежестта съвпада с центъра на кръга. Центърът на тежестта на правоъгълник също съвпада с геометричния му център, а формулата за лицето е добре известна. Четириъгълник, в частност успоредник (ако не е правоъгълник) и трапец, се представя като обединение на два триъгълника. Функцията, която определя лицето и центъра на тежестта на триъгълник е `triang(A,B,C)`, където A, B, C са координатите на трите върха на триъгълника.

```
function T=triang(A,B,C)
%A, B, C са 1x2 вектори, координати на точките
T(1)=abs(det([B-A;C-A]))/2;
```

```

P=(A+B+C) ./3;
T(2)=P(1); T(3)=P(2);
end

```

Масата (т.е. лицето) на сектор CAB от кръг с радиус r и ъгъл θ е

$$S = \frac{\theta r^2}{2}.$$

Ако върхът C има координати (a, b) и началната страна \overrightarrow{CA} (ъгълът при върха се мери в посока обратно на часовниковата стрелка) на сектора е успоредна и еднопосочна с абсцисата, то координатите на центъра на тежестта се дават с

$$x_0 = \frac{2r}{3\theta} \sin \theta + a, \quad y_0 = \frac{2r}{3\theta} (1 - \cos \theta) + b.$$

Ако \overrightarrow{CA} сключва ъгъл α с абсцисата, то

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \frac{2r}{3\theta} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 1 - \cos \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Функцията, която намира лицето и центъра на тежестта на сектора е `sector(r,theta, alpha, a,b)` и се задава със следния .m файл:

```

function SS=sector(r,tet,alpha,a,b)
SS(1)=tet*r^2/2;
Cm=(2*r/(3*tet))*[cos(alpha) -sin(alpha)\ \ sin(alpha) cos(alpha)]*
[sin(tet)\ \ 1-cos(tet)]+[a\b];
SS(2)=Cm(1); SS(3)=Cm(2);
end

```

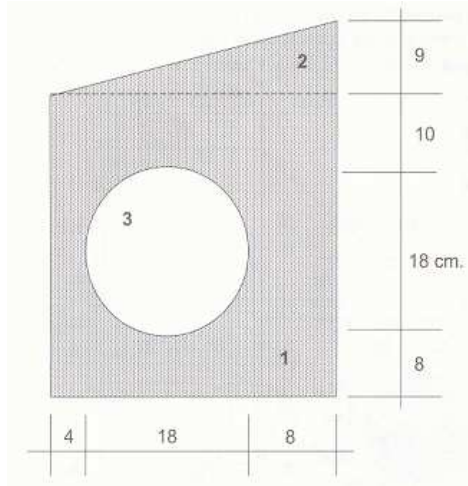
Пример 1. Да се намери масата и центърът на тежестта на фигурата дадена на фиг. 1.

Фигурата се състои от трапец и изрязан кръг. Центърът на кръга е с координати $(4 + 9, 8 + 9)$. Трапеца разделяме на два триъгълника с върхове $A(0, 0)$, $B(30, 0)$, $D(0, 36)$ и $B(30, 0)$, $C(30, 45)$, $D(0, 36)$. Изпълняваме командата

```

[mass Cmass]=masscenter([-pi*9^2 13 17],triang([0 0],[30 0],[0 36]),
triang([30 0],[30 45],[0 36]))

```

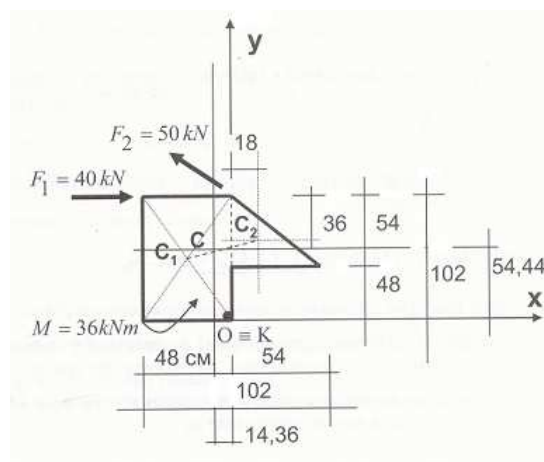


Фигура 1:

и получаваме

$$\text{mass} = 960.5310 \quad \text{Cmass} = [16.2326 \quad 21.2164]$$

Пример 2. Да се намери центърът на тежестта на фигурата дадена на фиг. 2 и да се редуцират приложените към нея сили за точката К. Да се определи правата, за точките на която системата сили и моменти се редуцира до една единствена сила.



Фигура 2:

Фигурата се състои от правоъгълник и триъгълник. Лицето на правоъгълника е $48 \cdot 102$, а центърът е с координати $(-24, 51)$ като за начало на координатната система сме избрали точката K . Върховете на триъгълника са с координати $(0, 48)$, $(0, 102)$, $(54, 48)$. Изпълняваме

```
[mass CM]=masscenter([48*102 -24 51], triang([0 48],[0 102],[54 48]))
```

и получаваме

```
mass = 6354          CM = [-14.3626    54.4419]
```

Да припомним, че ако в точка A с координати (x_A, y_A) е приложена сила \vec{f} с координати (x_f, y_f) и големина $f = \|\vec{f}\|$, то алгебричната стойност на моментът (т.е. големината взета със знак), който тази сила поражда относно точка $M(x_M, y_M)$ се дава с

$$m(M, A, f) = y_f(x_A - x_M) - x_f(y_A - y_M) = f\delta = \overrightarrow{MA} \times \vec{f},$$

където δ е ориентираното разстояние от M до правата през A , върху която лежи \vec{f} . Ако знакът на момента е положителен, то той поражда въртене около M обратно на часовниковата стрелка (т.е. векторът на момента сочи от чертежа към нас) и по посока на часовниковата стрелка, ако е отрицателен.

Когато върху фигурата действат няколко сили $\{f_i\}$ сключващи с абсисата съответно ъгли $\{\alpha_i\}$ и приложени в точки $\{A_i\}$, $i = 1, 2, \dots, k$, то резултантната сила и моментът относно зададена точка M се пресмятат с функцията **reduction** $([x_M, y_M], m, [f_1, \alpha_1, x_{A_1}, y_{A_1}], \dots, [f_n, \alpha_n, x_{A_n}, y_{A_n}])$. Еднотипните величините трябва да се задават в едни и същи мерни единици, като ъглите задължително в градуси мерени обратно на часовниковата стрелка от абсисната ос. Препоръчваме силите в kN, координатите в метри (m), а моментите в kN/m. Ето и скриптът задаващ функцията.

```
function [R mK]=reduction(varargin)
%[R mK]=reduction([Kx Ky],m,[f1 a1 A1x A1y],...,[fn an Anx Any])
%ъглите задължително в градуси
F=zeros(nargin-2,2); A=zeros(nargin-2,2); %R=zeros(1,2);
for i=3:nargin
    F(i-2,1)=varargin{i}(1)*cos(varargin{i}(2)*pi/180);
    F(i-2,2)=varargin{i}(1)*sin(varargin{i}(2)*pi/180);
    A(i-2,:)=[varargin{i}(3)-varargin{1}(1),
              varargin{i}(4)-varargin{1}(2)];
end;
```

```

R=sum(F);
mK=sum( A(:,1).*F(:,2)-A(:,2).*F(:,1) )+ varargin{2};
end

```

В разглеждания пример изпълняваме командата

```
[R mK]=reduction([0 0],36,[40 0 -.48 1.02],[50 135 0 1.02])
```

Получаваме $R=[4.6447 \ 35.3553]$ и $mK=31.2624$ kNm. Функцията връща координатите на вектора на резултантната сила и за да получим величината ѝ трябва да намерим дължината му, т.е. да изпълним

```
sqrt(R(1)^2+R(2)^2),
```

което дава $\|R\| = 35.6591$.

Правата, за точките на която системата от резултантна сила $R = (R_x, R_y)$ и момент m_K се редуцира до една единствена сила, има (съгласно казаното горе) уравнение

$$m_k = R_y(x - x_K) - R_x(y - y_K),$$

т.е.

$$R_y(x - x_K) - R_x(y - y_K) - m_K = 0.$$

В разглеждания пример $x_K = y_K = 0$ и следователно уравнението има вида

$$R_y x - R_x y - m_K = 0,$$

т.е.

$$35.3553 \cdot x - 4.6447 \cdot y - 31.2624 = 0$$

2 Инерционни моменти на равнинни фигури

Да припомним дефинициите на инерционните моменти за фигура D в равнината YZ :

$$I_Y \stackrel{def}{=} \int_D z^2 dS, \quad I_Z \stackrel{def}{=} \int_D y^2 dS$$
$$I_{YZ} \stackrel{def}{=} \int_D yz dS \quad I_0 \stackrel{def}{=} \int_S r^2 dS = I_Y + I_Z,$$

където r е разстоянието до началото на (полярна) координатна система. Първите два интеграла са осевите инерционни моменти (относно осите Y и Z). Третият интеграл се нарича центробежен (смесен) инерционен момент, а последния полярен инерционен момент.

Едно не много сложно упражнение по Математически анализ 2 е да пресметнем горните моменти за следните фигури

1. **Правоъгълник** D зададен с $D = \{a \leq y \leq b; c \leq z \leq d\}$

$$I_Y = \frac{1}{3}(b-a)(d^3 - c^3)$$
$$I_Z = \frac{1}{3}(d-c)(b^3 - a^3)$$
$$I_{YZ} = \frac{1}{4}(b^2 - a^2)(d^2 - c^2)$$

2. **Кръг** C с радиус r и център с координати (a, b) .

$$I_Y = \frac{\pi r^4}{4} + b^2 \pi r^2$$
$$I_Z = \frac{\pi r^4}{4} + a^2 \pi r^2$$
$$I_{YZ} = ab \pi r^2$$

3. **Правоъгълен триъгълник с катети успоредни на осите** определен от върховете (a, c) , (b, c) и (a, d) (т.е. с катети $z = c$ и $y = a$)

$$I_Y = \frac{1}{12}|b-a||d-c|(d^2 + 2cd + 3c^2) = \frac{1}{12}|b-a||d-c|(2c^2 + (d+c)^2)$$
$$I_Z = \frac{1}{12}|d-c||b-a|(a^2 + 2ab + 3b^2) = \frac{1}{12}|d-c||b-a|(2a^2 + (b+a)^2)$$
$$I_{YZ} = \frac{1}{24}|b-a||d-c|[3(b-a)(d-c) + 4(bd + 2ac)]$$

Да отбележим, че ако означим $h = d - c$ и $t = b - a$ имаме

$$\begin{aligned} I_Y &= \frac{|th|}{12}((h+c)^2 + 2c^2) \\ I_Z &= \frac{|th|}{12}((t+2a)^2 + 2a^2) \\ I_{YZ} &= \frac{|th|}{24}(-3th + 4(bd + 2ac)) \end{aligned}$$

4. **Кръгов сектор с радиус r и ъгъл при центъра θ** определен с координати на центъра $C(a, b)$ и \overrightarrow{CA} склюващ ъгъл 0 градуса.

$$\begin{aligned} I_Y &= \frac{r^4}{16}(2\theta - \sin 2\theta) + \frac{2}{3}br^3(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2}b^2r^2\theta \\ I_Z &= \frac{r^4}{16}(2\theta + \sin 2\theta) + \frac{2}{3}ar^3 \sin \theta + \frac{1}{2}a^2r^2\theta \\ I_{YZ} &= \frac{r^4}{16}(1 - \cos 2\theta) + \frac{1}{3}ar^3(1 - \cos \theta) + \frac{1}{3}br^3 \sin \theta + \frac{1}{2}abr^2\theta \end{aligned}$$

Ако \overrightarrow{CA} сключва ъгъл α , то се използва връзката

$$\begin{pmatrix} I_Z & I_{YZ} \\ I_{YZ} & I_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I'_Z & I'_{YZ} \\ I'_{YZ} & I'_Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

където I' са изчислени по горните формули.

В частност за полукръг, т.е. $\theta = \pi$, формулите изглеждат така

$$\begin{aligned} I_Y &= \frac{\pi r^4}{8} + \frac{4}{3}br^3 + \frac{1}{2}b^2r^2\pi \\ I_Z &= \frac{\pi r^4}{8} + \frac{1}{2}a^2r^2\pi \\ I_{YZ} &= \frac{2}{3}ar^3 + \frac{1}{2}abr^2\pi, \end{aligned}$$

а за четвърт кръг

$$\begin{aligned} I_Y &= \frac{\pi r^4}{16} + \frac{2}{3}br^3 + \frac{1}{4}b^2r^2\pi \\ I_Z &= \frac{(\pi - 2)r^4}{16} + \frac{2}{3}ar^3 + \frac{1}{4}a^2r^2\pi \\ I_{YZ} &= \frac{r^4}{8} + \frac{1}{3}(a+b)r^3 + \frac{1}{4}abr^2\pi \end{aligned}$$

Програмите, които пресмятат по горните формули са съответно **m_prav(a,b,c,d)**, **m_circ(a,b,r)**, **m_ptriang(a,b,c,d)**, **m_triang(a,b,c,d)**, **m_sector(r,tet,a,b)**.
Ето и съответните им .m файлове

m_prav.m

```
function [IY IZ IYZ]=m_prav(a,b,c,d)
%
IY=(b-a)*(d^3-c^3)/3;
IZ=(d-c)*(b^3-a^3)/3;
IYZ=(b^2-a^2)*(d^2-c^2)/4;
```

m_circ.m

```
function Inm=m_circ(a,b,r)
%
IY=pi*r^4/4+b^2*pi*r^2;
IZ=pi*r^4/4+a^2*pi*r^2;
IYZ=a*b*pi*r^2;
Inm=[IY IZ IYZ];
```

m_ptriang.m

```
function Inm]=m_ptriang(a,b,c,d)
%
IY=abs((b-a)*(d-c))*((d+c)^2+2*c^2)/12;
IZ=abs((b-a)*(d-c))*((b+a)^2+2*a^2)/12;
IYZ=abs((b-a)*(d-c))*[3*(a-b)*(d-c)+4*(b*d+2*a*c)]/24;
Inm=[IY IZ IYZ];
```

m_sector.m

```
function Inm=m_sector(r,tet,alpha,a,b)
%
R=[cos(alpha) -sin(alpha); sin(alpha) cos(alpha)];
A=R'*[a;b];
a=A(1);b=A(2);
IY=(2*tet-sin(2*tet))*r^4/16+2*b*r^3*(1-cos(tet))/3+b^2*r^2*tet/2;
IZ=(2*tet+sin(2*tet))*r^4/16+2*a*r^3*sin(tet)/3+a^2*r^2*tet/2;
IYZ=(1-cos(2*tet))*r^4/16+a*r^3*(1-cos(tet))/3+b*r^3*sin(tet)/3+
a*b*r^2*tet/2;
II=R*[IZ IYZ; IYZ IY]*R';
Inm=[II(2,2) II(1,1) II(1,2)];
```


Матрицата от моментите

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} I_z & I_{yz} \\ I_{yz} & I_y \end{pmatrix}$$

е симетрична и следователно съществува ортогонална матрица T (т.е. $TT^\tau = E$), такава че

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} I_z & I_{yz} \\ I_{yz} & I_y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} T^\tau,$$

където $I_1 < I_2$ са характеристичните корени на матрицата от моментите, т.е. корените на

$$\lambda^2 - (I_y + I_z)\lambda + (I_y I_z - I_{yz}^2) = 0. \quad (2)$$

Следователно

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}.$$

Стълбовете на T са единични собствени вектори на матрицата (съответстващи на I_1 и I_2). Но това означава, че ако сменим координатната система с такава имаща за оси собствените вектори, т.е. направим смяната

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

смесеният момента I_{uv} ще е равен на нула.

Наистина, тъй като

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} (y \ z) = \begin{pmatrix} y^2 & yz \\ yz & z^2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} (u \ v) = \begin{pmatrix} u^2 & uv \\ uv & v^2 \end{pmatrix},$$

то

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} I_z & I_{yz} \\ I_{yz} & I_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \int_D y^2 dS & \int_D yz dS \\ \int_D yz dS & \int_D z^2 dS \end{pmatrix} = \int_D \begin{pmatrix} y^2 & yz \\ yz & z^2 \end{pmatrix} dS = \int_D \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} (y \ z) dy dz \\ &= \int_D T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} (u \ v) T^\tau |\det T| dudv = T \int_D \begin{pmatrix} u^2 & uv \\ uv & v^2 \end{pmatrix} dudv T^\tau \\ &= T \begin{pmatrix} I_v & I_{uv} \\ I_{uv} & I_u \end{pmatrix} T^\tau = T \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} T^\tau. \end{aligned}$$

Осите по направленията на собствените вектори, т.е. за които смесеният момент е нула, се наричат главни инерционни оси.

Матрицата T и моментите I_1 (минимален), I_2 (максимален) в Matlab може да намерим само с една команда

$$[T,D]=\text{eig}(A).$$

Матрицата D е диагонална с I_1 в горния ляв ъгъл, а първият стълб на T е нормиран собствен вектор съответстващ на собствената стойност I_1 . Той (или негов противоположен вектор) е единичния вектор на оста v . Аналогично вторият стълб на T (или негов противоположен) е единичният вектор на оста u и съответства на максималния момент $I_2 = I_u$. Посоките на векторите избираме, така че правият ъгъл между тях да се описва обратно на часовниковата стрелка при въртене от u към v .

Пример 3. За показаната на фиг. 1 равнинна фигура да се пресметнат главните инерционни моменти и да се определи положението на главните централни инерционни оси. (Примерът от стр 14 в сборника на Р. Апостолов)

Главните инерционни моменти се пресмятат спрямо координатна система с начало центъра на тежестта, а за оси хоризонталния и вертикалния лъчи излизащи от него. Центърът на тежестта (както вече намерихме) има координати (16.2326, 21.2164) спрямо началната координатна система (с начало долния ляв връх на фигурата). Фигурата се състои от три елемента и затова изпълняваме

$$\begin{aligned} \text{Inm} = & \text{m_prav}(-16.2326, 30-16.2326, -21.2164, 36-21.2164) + \\ & \text{m_ptriang}(30-16.2326, -16.2326, 36-21.2164, 45-21.2164) - \\ & \text{m_circ}(13-16.2326, 17-21.2164, 9) \end{aligned}$$

Резултатът е

$$\text{Inm} = [161 \ 438.01 \quad 83494.82 \quad 10870.52],$$

т.е.

$$I_Y = 161438.01 \text{ cm}^4; \quad I_Z = 83494.82 \text{ cm}^4; \quad I_{YZ} = 10870.52 \text{ cm}^4.$$

Командата

$$\text{roots}([1, -(\text{Inm}(1)+\text{Inm}(2)), \text{Inm}(1)*\text{Inm}(2)-\text{Inm}(3)^2])$$

ни дава главните инерционни моменти на фигурата:

$$I_1 = 162925.70 \text{ cm}^4; \quad I_2 = 82007.13 \text{ cm}^4.$$

Ако изпълним командите

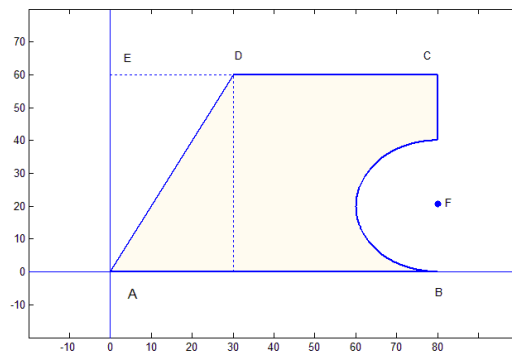
$$A = [\text{Inm}(1) \quad \text{Inm}(3); \text{Inm}(3) \quad \text{Inm}(2)]; \quad [T, D] = \text{eig}(A)$$

ще получим

$$T = \begin{pmatrix} 0.1356 & -0.9908 \\ -0.9908 & -0.1356 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 82007.13 & 0 \\ 0 & 162925.70 \end{pmatrix}$$

За единичен вектор на оста u (max) избираме противоположния на втория стълб, т.е. $(0.9908, 0.1356)$, а за ордината $(-0.1356, 0.9908)$.

Пример 4. За показаната на фиг. 3 равнинна фигура да се пресметнат главните инерционни моменти и да се определи положението на главните централни инерционни оси.



Фигура 3:

Дадената фигура може да се разглежда като правоъгълник $ABCE$ с размери 80×60 , от който са изрязани правоъгълен триъгълник $\triangle ADE$ с катети с дължини 60 и 30, и полукръг с радиус 20 и център точката $F(80, 20)$ върху отсечката BC . Избираме начална координатна система с начало точка A и абсиса AB . Центърът на тежестта (точка M_c) и лицето ($mass$) на фигурата намираме с командата

```
[mass, Mc]=masscenter([80*60,40,30], [-1,1,1].*triang([0 0],
[30 60],[0 60]), [-1,1,1].*sector(20, pi, pi/2, 80, 20))
```

В резултат получаваме

$$mass = 3271.70 \text{ cm}^2, \quad M_c(42.2009, 29.1696).$$

Изчисляваме инерционните моменти I_Y , I_Z , I_{YZ} относно координатна система със същите оси, но с център M_c :

```
Inm=m_prav(-Cm(1),80-Cm(1),-Cm(2),60-Cm(2))-
    m_ptriang(-Cm(1),30-Cm(1),60-Cm(2),-Cm(2))-
    m_sector(20,pi,pi/2,80-Cm(1),20-Cm(2))
```

След това с командата

```
A=[Inm(1) Inm(3); Inm(3) Inm(2)]; [T,D]=eig(A)
```

намираме главните оси и минималния и максималния инерционни моменти.

$$T = \begin{pmatrix} 0.7048 & -0.7094 \\ -0.7094 & -0.7048 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 615896.26 & 0 \\ 0 & 1473861.47 \end{pmatrix}$$

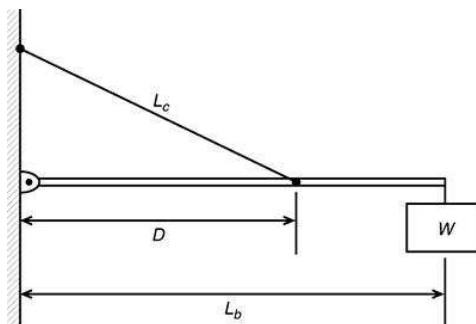
За единичен вектор на оста u (max) избираме противоположния на втория стълб, т.е. $(0.7094, 0.7048)$, а за ордината $(-0.7048, 0.7094)$.

$$I_{min} = 615896.26 \text{ mm}^4 \quad I_{max} = 1473861.47 \text{ mm}^4.$$

Ъгълът, който сключват главните оси със старите оси е много близък до 45° .

3 Един пример на минимаксна задача по механика

Пример 5. Да се намери D , за което да е минимална силата на опън T в окачвача на конструкцията от фигура 4 с $L_c = 3$, $L_b = 4$, $W = 400N$



Фигура 4:

От баланса на моментите следва, че

$$TD \sin \alpha = L_b W; \quad \text{където} \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{L_c^2 - D^2}}{L_c}.$$

$$T = \frac{L_c L_b W}{D \sqrt{L_c^2 - D^2}}$$

Решение без производна на функция (точност 0.05 м):

$$D = 0.05 : 0.05 : 3; T = 4 * 3 * 400 ./ (D .* \text{sqrt}(9 - D.^2));$$

$$[F_m, ind] = \text{min}(T);$$

Дава резултат $F_m = 1066.9$, $ind = 42$.

Следователно $D_{min} = 42 \times 0.05 = 2.10$ м.

Решение чрез производна на функция:

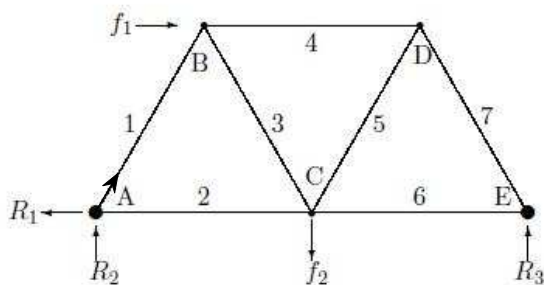
$$\text{syms } D; F = 1 / (D * \text{sqrt}(9 - D.^2));$$

$$F1 = \text{diff}(F, D); \text{eval}(\text{solve}(F1))$$

Следователно $D_{min} = 2.1213$ м.

4 Определяне на опорните реакции и усилията в прътите на ферма

Да разгледаме фермата:



Фигура 5: Всички пръти имат една съща дължина 1 м. Височините от точки B и D към правата AE са равни на $h = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$. Ъглите са 60° . $f_1 = 1000N$, $f_2 = 5000N$.

Разглежданата ферма се състои от 7 пръта и следователно имаме 7 неизвестни усилия s_1, s_2, \dots, s_7 . С трите опорни реакции R_1, R_2, R_3 неизвестните стават 10. От друга страна всеки от петте възела на фермата дава по 2 уравнения (от балансите на силите по абцисата и ординатата), т.е. общо 10 уравнения - толкова колкото са и неизвестните. Matlab функцията зададена с файла Ferma.m (даден по долу) пресмята търсените величини. За целта се изпълнява в командния прозорец: `S=Ferma([1000 5000])`.

Освен от баланса на силите във възлите ние можем да получим уравнения и от общия баланс на силите и този на моментите относно различни точки. Тези уравнения, в които участват само реакциите и външните сили, ще ползваме като контролни. Програмата, която решава разширената линейна система (с добавените уравнения) е дадена във FermaEx.m. Изпълнява се `S=FermaEx([1000 5000])`

В учебниците обаче се описва обратния път, т.е. първо се определят опорните реакции, а след това стъпка по стъпка усилията. Обяснението за този подход е, че описваният метод е за ръчно, а не за компютърно решаване на задачата. Затова от чисто педагогически съображения ще следваме класическия подход, а файловете Ferma.m и FermaEx.m ще ги дадем накрая.

Изчисляване на опорните реакции;

От баланса на силите получаваме: $R_1 = f_1; \quad R_2 + R_3 = f_2$.

От баланса на моментите относно точка А получаваме:

$$0.R_2 - 1.f_2 + 2R_3 - h.f_1 = 0$$

От баланса на моментите относно точка В получаваме:

$$-hR_1 - \frac{1}{2}R_2 - \frac{1}{2}f_2 + \frac{3}{2}R_3 = 0.$$

Следователно

$$\begin{cases} R_1 & & & = f_1 \\ & R_2 & +R_3 & = f_2 \\ & & 2R_3 & = \frac{\sqrt{3}}{2}f_1 + f_2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}R_1 & +\frac{1}{2}R_2 & -\frac{3}{2}R_3 & = -\frac{1}{2}f_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ \sqrt{3} & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}f_1 + f_2 \\ -f_2 \end{pmatrix}$$

т.е. $\mathbf{A} * \mathbf{R} = \mathbf{F}$, откъдето $\mathbf{R} = \mathbf{A} \setminus \mathbf{F}$.

`function R=Rferma(f) % f = [f1, f2] например f=[1000, 5000]`

`h = $\frac{\sqrt{3}}{2}$;`

$$A = [1 \ 0 \ 0; 0 \ 1 \ 1; 0 \ 0 \ 2; 2*h \ 1 \ -3];$$

$$b = [f(1) \ f(2) \ h*f(1)+f(2) \ -f(2)];$$

$$R = A \setminus b;$$

Изчисляване на усилията в прътите;

Нека s_i е усилието в прът i . Приемаме, че са на опън, т.е. насочени са навътре по пръта (получаването на отрицателна стойност означава, че усилието е натиск). От баланса на силите по всяка от осите Ox и Oy получаваме по две уравнения за всеки възел, общо 10 уравнения със 7 неизвестни.

$$\begin{aligned} \text{A: } Ox : \frac{1}{2}s_1 + s_2 - R_1 &= 0; & Oy : \frac{\sqrt{3}}{2}s_1 + R_2 &= 0 \\ \text{B: } Ox : -\frac{1}{2}s_1 + \frac{1}{2}s_3 + s_4 + f_1 &= 0; & Oy : \frac{\sqrt{3}}{2}s_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}s_3 &= 0. \\ \text{C: } Ox : -s_2 - \frac{1}{2}s_3 + \frac{1}{2}s_5 + s_6 &= 0; & Oy : \frac{\sqrt{3}}{2}s_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}s_5 - f_2 &= 0. \\ \text{D: } Ox : -s_4 - \frac{1}{2}s_5 + \frac{1}{2}s_7 &= 0; & Oy : -\frac{\sqrt{3}}{2}s_5 - \frac{\sqrt{3}}{2}s_7 - f_2 &= 0. \\ \text{E: } Ox : -s_6 - \frac{1}{2}s_7 &= 0; & Oy : -\frac{\sqrt{3}}{2}s_7 + R_3 &= 0. \end{aligned}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} R_1 \\ -R_2 \\ 0 \\ -f_1 \\ 0 \\ f_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -R_3 \end{pmatrix}$$

$$S = \mathbf{B} \setminus \mathbf{b}.$$

```
function T=Tferma(f) % f = [f1, f2]
h=sqrt(3)/2;
R=Rferma(f);
B=[.5 1 0 0 0 0 0; h 0 0 0 0 0 0; 1 0 1 0 0 0 0; -.5 0 .5 1 0 0 0;
0 -1 -.5 0 .5 1 0; 0 0 h 0 h 0 0; 0 0 0 -1 -.5 0 .5; 0 0 0 0 1 0 1;
0 0 0 0 1 .5; 0 0 0 0 0 0 h];
b=[R(1) -R(2) 0 -f(1) 0 f(2) 0 0 0 -R(3)];
T=B \ b;
```

Файл **Ferma.m**:

```

function T=Ferma(f)
%f = [f1, f2], например S=Ferma([1000, 5000]), т.е. f(1)=1000, f(2)=5000
h=sqrt(3)/2;

A=[.5 1 0 0 0 0 0 -1 0 0; h 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0; 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0;
-.5 0 .5 1 0 0 0 0 0 0; 0 -1 -.5 0 .5 1 0 0 0 0; 0 0 h 0 h 0 0 0 0 0;
0 0 0 -1 -.5 0 .5 0 0 0; 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0; 0 0 0 0 0 1 .5 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 h 0 0 1];

b=[0 0 0 -f(1) 0 f(2) 0 0 0 0]';

T=A\b;

```

Файл **FermaEx.m**:

```

function T=FermaEx(f)
%f = [f1, f2], например T=Ferma([1000, 5000]), т.е. f(1)=1000, f(2)=5000

h=sqrt(3)/2;

A=[.5 1 0 0 0 0 0 -1 0 0; h 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0; 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0;
-.5 0 .5 1 0 0 0 0 0 0; 0 -1 -.5 0 .5 1 0 0 0 0; 0 0 h 0 h 0 0 0 0 0;
0 0 0 -1 -.5 0 .5 0 0 0; 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0; 0 0 0 0 0 1 .5 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 h 0 0 1; 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 2; 0 0 0 0 0 0 0 2*h 1 -3;];

b=[0 0 0 -f(1) 0 f(2) 0 0 0 0 f(1) f(2) h*f(1)+f(2) -f(2)]';

T=A\b;

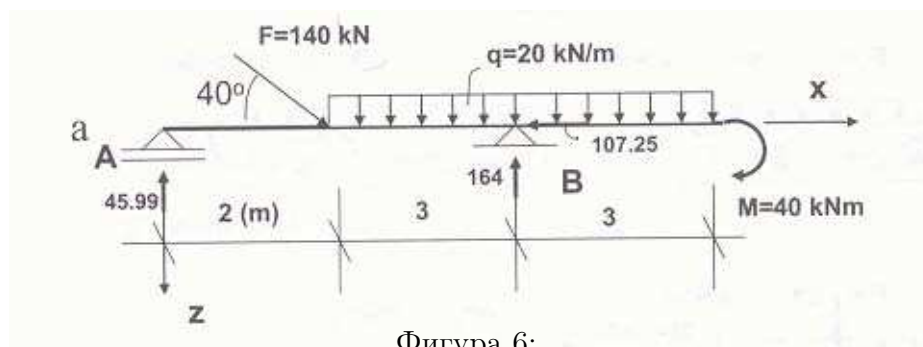
```

При изпълнението на всички програмки получаваме един и същи резултат:

s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7
-2386.8	2.1934	2386.8	-3386.8	3386.8	1693.4	-3386.8
R_1	R_2	R_3				
1000.0	2067.0	2933.0				

5 Разрезни усилия в равнинно натоварени прави греди

Пример 6. Да се определят разрезните усилия и момент и да се начертаят съответните диаграми за следната равнинно натоварена греда. (стр. 28 от Р. Апостолов, "Сборник със задания за курсови работи ...")



Фигура 6:

Както е известно от теоретичната механика вътрешните усилия резултат от действащите върху гредата сили и моменти могат да се приведат към една резултантна сила $\mathbf{P} = (N, Q_y, Q_z)$ и един главен момент $\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_z)$ приложени в центъра на тежестта на мисленото сечение. Резултантната сила и момент за лявата и дясната част на гредата са съответно противоположни вектори.

За равнинно натоварени греди е в сила $Q_y = M_x = M_z = 0$, т.е. ние търсим само нормалното усилие N (хоризонтално по оста на гредата), срыващото усилие (надолу за лявата и нагоре за дясната част) Q_z , и момента M_y (носочен отдолу на горе, т.е. обратно на часовниковата стрелка за лявата и по часовниковата стрелка за дясната част).

Нека, както е прието, с $t(x)$ и $q(x)$ означим осевото и напречно натоварване измерено в Нютони на метър (N/m). (Най-често те отразяват влиянието на теглото на гредата или рамката) В разглеждания пример $t(x) = 0$ и $q(x) = 20 \text{ kN/m}$ (Гравитацията е перпендикулярна на гредата).

От формулите на Шведлер (Schwedler) получаваме

$$\begin{aligned}
 N &= - \int t(x) dx + c_1 & N &= \int t(x) dx + c_1 \\
 Q_z &= - \int q(x) dx + c_2 & Q_z &= \int q(x) dx + c_2 \\
 M_y &= \int Q_z(x) dx + c_3 & M_y &= - \int Q_z(x) dx + c_3
 \end{aligned} \quad (3)$$

Константите c_1, c_2, c_3 определяме от стойностите на вътрешните усилия в началото на участъците, т.е. в точка A , точката на действие на силата F и точка B . За целта са ни необходими и реакциите в опорите A и B .

Нека $R = [R(1), R(2), R(3)]$, където $R(1)$ е хоризонтална реакция на опората B , а $R(2), R(3)$ са вертикалните реакции в опорите A и B , съответно. Нека $d = [2, 3, 3]$ е векторът от дължините на трите участъка, на която мислено се разделя гредата. Следвайки подхода даден в параграф 2 получаваме подпрограмката, която изчислява реакциите.

Текстът ѝ е записан като файл **gredaR.m**:

```
function R=gredaR(q,F,a,d,m)
    %a - ъгълът между F и гредата в градуси; m - моментът;
    Fh=F*cos(a*pi/180); % хоризонтална съставляща на външната сила
    Fv=F*sin(a*pi/180); % вертикална съставляща
    f=q*(d(2)+d(3));
    A=[1 0 0; 0 1 1; 0 0 d(1)+d(2); 0 d(1)+d(2) 0];
    b=[Fh; f+Fv; Fv*d(1)+f*(d(1)+d(2))+m; Fv*d(2)-m];
    R=A\b;
end
```

Изпълнението на **gredaR(20,140,40,[2 3 3],40)** от командния прозорец или като част от скрипт ни дава търсените реакции.

$$R = [107.2462, 45.9942, 163.9961]$$

За удобство съставяме следната таблица със стойностите на вътрешните усилия в началото и в края на всеки участък. Знакът "минус" показва, че силата е в посока противоположна на избраната за положителна за съответния участък.

Участък	1		2		3	
отстояние x	$x = 0$	$x = 2$	$x = 0$	$x = 3$	$x = 3$	$x = 0$
N	0		-107,2462			0
Q_z	45,9942		-43,9961			0
M_y	0		91,9884			-40

В точка A ненулево е само срязващото усилие Q_z и то се определя от баланса $Q_z - R(2) = 0$. В края на гредата ненулево е само M_y и се определя от $M_y + m = 0$. (При третия участък разглеждаме дясната част на гредата, защото е най-малко натоварена с външни сили.) За началото

на втория участък имаме

$$\begin{aligned}N + R(1) &= 0 \\Q_z + Fv - R(2) + 0.q &= 0 \\M_y - 2R(2) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N &= -R(1) = -107.2462 \\Q_z &= -89,9903 + 45,9942 = -43,9961 \\M_y &= 2R(2) = 91,9884\end{aligned}$$

Matlab функцията, която реализира уравнения (3) е дадена във файла **gredaD.m** (за лява страна) и **gredaDr.m** (за дясна страна):

```
function [N Q M]=gredaD(t,q,c)
    %Лява страна на участък; c е 1x3 вектор, стълб от таблицата.
    syms x;
    N=-int(t,x)+c(1);
    Q=-int(q,x)+c(2);
    M=int(Q,x)+c(3);
end
```

```
function [N Q M]=gredaDr(t,q,c)
    %Дясна страна на участък; c е 1x3 вектор, стълб от таблицата.
    syms x;
    N=int(t,x)+c(1);
    Q=int(q,x)+c(2);
    M=-int(Q,x)+c(3);
end
```

За да намерим търсените усилия изпълняваме

$$\begin{aligned}[N1 \ Q1 \ M1] &= \text{gredaD}(0, 0, [0, R(2), 0]); \\[N2 \ Q2 \ M2] &= \text{gredaD}(0, 20, [-R(1), -43.9961, 2R(2)]); \\[N3 \ Q3 \ M3] &= \text{gredaDr}(0, 20, [0, 0, -40]).\end{aligned}$$

За да начертаем трите диаграми (за N , Q_z , M_y) изпълняваме следните три команди:

```

plot([0 8],[0 0],'k'); hold on; plot([2 2],[-120 50],'k'); x=0:.05:3;
stem(x+2,N2*ones(size(x)),'Marker','none'); plot([5 5],[-120 50],'k');

```

```

syms x; plot([0 8],[0 0],'k'); hold on; x=0:.05:2;
stem(x,Q1*ones(size(x)),'Marker','none'); plot([2 2],[-120 150],'k');
x=0:.05:3; stem(x+2,subs(Q2,x),'Marker','none');
plot([5 5],[-120 150],'k'); stem(x+5,subs(20*(3-x),x),'Marker','none');

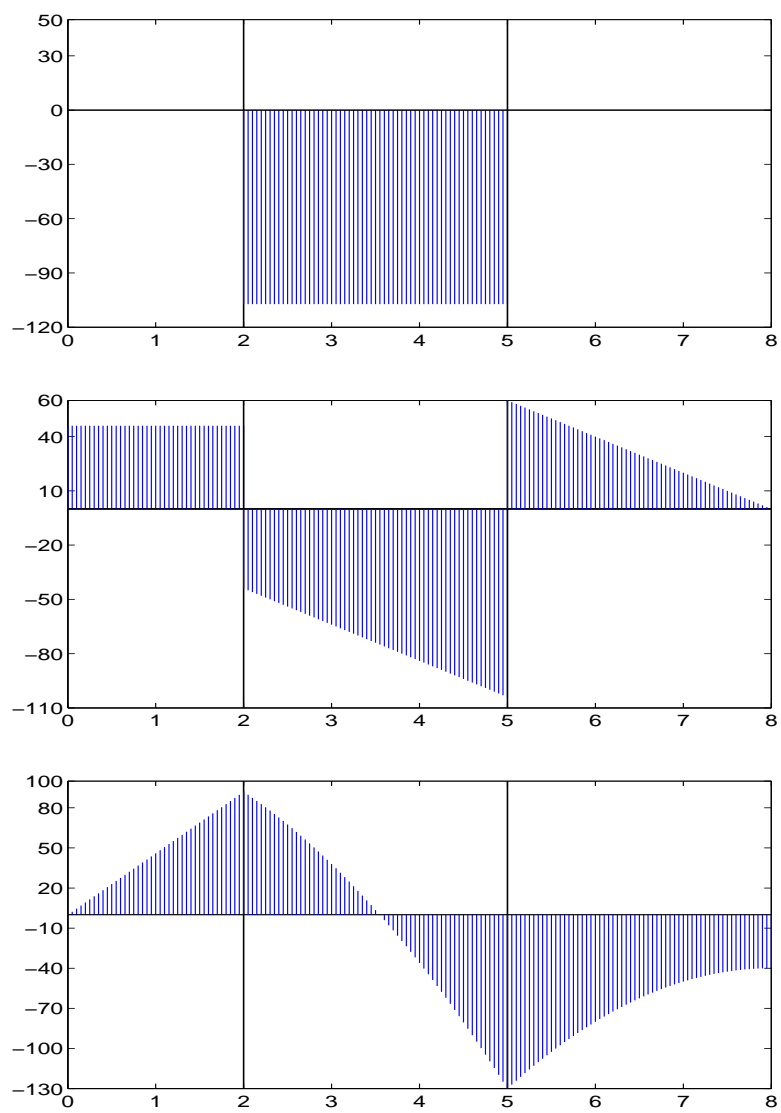
```

```

syms x; plot([0 8],[0 0],'k'); hold on; x=0:.05:2;
stem(x,subs(M1,x),'Marker','none'); plot([2 2],[-200 100],'k');
x=0:.05:3; stem(x+2,subs(M2,x),'Marker','none');
plot([5 5],[-200 100],'k');
stem(x+5,subs(-10*(3-x).^2-40,x),'Marker','none');

```

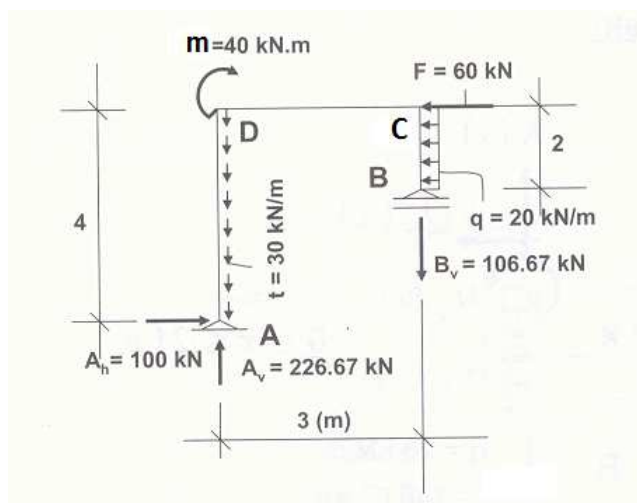
Ето как изглеждат диаграмите



Фигура 7: Отгоре надолу N, Q, M

6 Разрезни усилия в равнинно натоварени греди с начупена ос

Пример 7. Да се определят функциите задаващи разрезните усилия и момент и да се начертаят съответните диаграми за следната равнинно натоварена греда с начупена ос. (стр. 38 от Р. Апостолов, "Сборник със задания за курсови работи ...")



Фигура 8:

Нека $R = [R(1), R(2), R(3)]$, където $R(1) = A_h$ е хоризонтална реакция на опората A , а $R(2) = A_v$ и $R(3) = B_v$ са вертикалните реакции в опорите A и B , съответно. Нека d (в случая $= [4, 3, 2]$) е 1×3 векторът от дължините на трите участъка, на която мислено се разделя гредата. В разглеждания пример $t(x) = 30$ и $q(x) = 20$. Да означим с $f_t = d(1) \cdot t = 120$ и $f_q = q \cdot d(3) = 40$ резултантните сили на разпределените натоварвания. f_q можем да считаме, че е приложена в средата на третия участък. Действа и външна хоризонтална сила $F = 60$ kN.

За да намерим трите реакции съставяме система от поне 4 уравнения (за хоризонталните и вертикални сили и за моментите относно 2 точки). Както отбелязахме в предните параграфи това се прави за да избегнем грешки при съставянето на системата.

$$\left| \begin{array}{rcl} R(1) & & = F + f_q \\ & R(2) & + R(3) = f_t \\ (d(3) - d(1))R(1) & + d(2)R(2) & = d(2)f_t - m + d(3)F + f_q d(3)/2 \\ & & d(2)R(3) = m - d(1)F - (d(1) - d(3)/2) f_q \end{array} \right.$$

Първите две уравнения отразяват баланса на хоризонталните и вертикалните сили. Третото уравнение се получава от моментите относно точка B , а последното - относно точка A . Програмката, която решава тази система е следната функция дадена с **ramkaR.m**:

```
function R=ramkaR(t,q,F,a,d,m)           %Пример на стр. 38,

% d е вектор, чиито елементи са дължините на участъците от гредата
%Fh=F*cos(a*pi/180); % хоризонтална съставяща
%Fv=F*sin(a*pi/180); % вертикална съставяща

fq=q*d(3);
ft=t*d(1);
A=[1 0 0; 0 1 1; -(d(1)-d(3)) d(2) 0; 0 0 d(2)];
b=[F+fq; ft; ft*d(2)+F*d(3)-m+fq*d(3)/2; -d(1)*F-fq*(d(1)-d(3)/2)+m]
R=A\b;
end
```

Изпълнението **R=ramkaR(30,20,60,0,[4 3 2],40)** дава

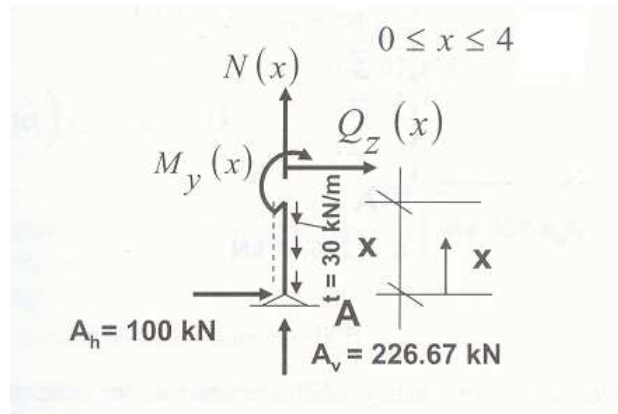
$$\mathbf{R} = [100.0000, 226.6667, -106.6667]$$

Отрицателната стойност на $R(3)$ показва, че тя е насочена надолу, т.е. в точка B има усилие на "откъсване".

Таблицата за началните (и крайни) условия за трите участъка изглежда така:

Участък	1		2		3	
	$x = 0$	$x = 4$	$x = 0$	$x = 3$	$x = 0$	$x = 2$
N	$-R(2)$		$-R(1)$		$-R(3)$	
Q_z	$-R(1)$		$R(2) - f_t$		0	
M_y	0		$m - 4R(1)$		0	

Както се вижда от чертежите **вертикалните участъци съответстват на дясна част от хоризонтална греда**. Затова в разглеждания пример



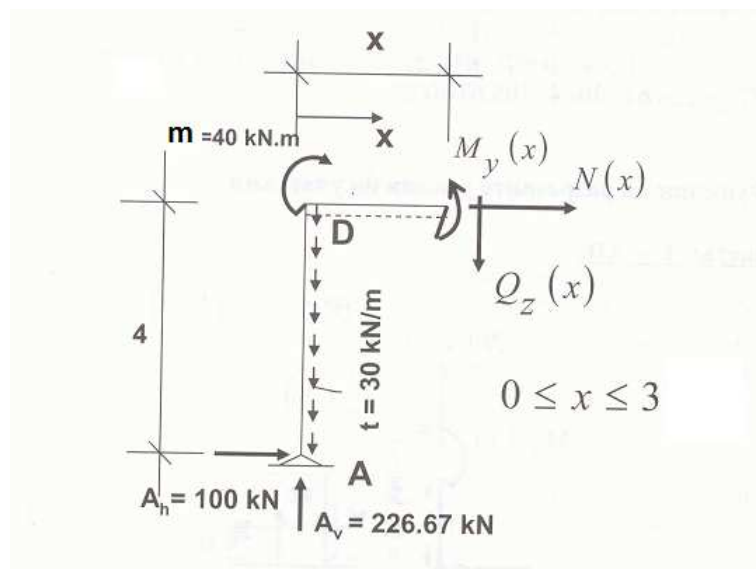
Фигура 9: Участък 1.

можем да ползваме скрипта **gedaDr.m**, а за средния участък **gedaD.m**:

$$[N1 \ Q1 \ M1] = \text{gedaDr}(30, 0, [-R(2), -R(1), 0]);$$

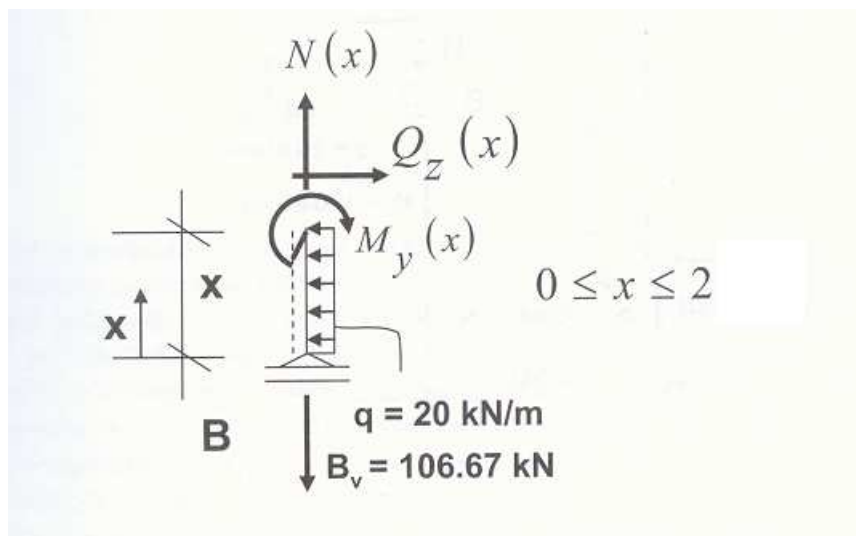
$$[N2 \ Q2 \ M2] = \text{gedaD}(0, 0, [-R(1), R(2) - 120, 40 - 4 * R(1)]);$$

$$[N3 \ Q3 \ M3] = \text{gedaDr}(0, 20, [-R(3), 0, 0]).$$



Фигура 10: Участък 2.

Резултатът от изпълнението на трите команди е даден в следната таблица



Фигура 11: Участък 3.

Участък	1	2	3
N	$30 * x - 680/3$	-100	$320/3$
Q_z	-100	$320/3$	$20 * x$
M_y	$100 * x$	$320/3 * x - 360$	$-10 * x^2$

Начертването на диаграмите за разгледания тип греди с начупена ос в традиционния вид не е ефективно с Matlab (за вертикалните оси ще е нужна допълнителна графична обработка), но те се чертаят лесно с прости (и безплатни) програмки за графики, може дори с Paint, коато е част от софтуера на Windows.

7 Преместване при специално огъване на прави греди. Еластична линия.

При този тип огъване деформацията е само в равнината XZ и гредата приема формата на крива линия (еластична линия) представляваща графиката на функция $z = w(x)$, която се определя (приблизително) като решение на диференциалното уравнение

$$w''(x) = -\frac{M_y(x)}{EI_y}.$$

Най-често коравината е константа, т.е. сечението и материалът навсякъде по дължината на гредата са еднакви.

Интегрирайки получаваме

$$\theta(x) = w'(x) = -\frac{1}{EI_y} \int M_y(x) dx + C_1.$$

$w'(x)$ представя изменението на тангес от ъгъла, който сключва допирателната с оста x и за малките изменения в нашия случай можем да считаме, че $w'(x)$ съвпада с този ъгъл.

Повторно интегриране с отчитането на факта, че $w(0) = 0$ ни дава

$$w(x) = \int \theta(x) dx.$$

Пример 8. За показаната на фиг. ?? права греда с дължина 4 метра, подпряна в двата края да се определи уравнението на еластичната линия и да се намерят максималните стойности на напречното преместване и наклон на сечението. Коравината е $EI_y = 2000kNm^2$. (Примерът е от стр 66 в сборника на Р. Апостолов)

В разглеждания пример в опорните точка А и В има само вертикални реакции. Нека $R = [R(1), R(2)]$ е векторът от стойностите на реакциите в точките А и В, съответно. За тях получаваме следната линейна система (приемаме първоначално, че векторите на реакциите с в положителна посока, т.е. надолу) :

$$\begin{array}{rcl} R(1) & +R(2) & +80 = 0 \\ 4R(1) & +160 & -30 = 0 \\ 4R(2) & +160 & +30 = 0 \end{array}$$

Решенията на тази система се виждат веднага (няма нужда да ползваме компютър)

$$R(1) = -32.5kN, \quad R(2) = -47.5kN.$$

Знакът минус показва, че реакциите са насочени нагоре.

С методите описани в параграф 3 определяме (ползваме лявата част на гредата)

$$Q_z(x) = -qx + R(1) = -20x + 32.5 \quad M_y(x) = \int Q_z(x) dx = -10x^2 + 32.5x.$$

Тогава

$$EI_y w'(x) = - \int M_y(x) dx + C_1 = \frac{10}{3}x^3 - \frac{32.5}{2}x^2 + C_1.$$

$$EI_y w(x) = \frac{10}{12}x^4 - \frac{32.5}{6}x^3 + C_1x + C_2.$$

От $w(0) = 0$ получаваме $C_2 = 0$, а от $w(4) = 0$ следва $C_1 = \frac{100}{3} = 33.3$.

И така

$$w(x) = \frac{1}{12000}(5x^4 - 32.5x^3 + 200x)$$

$$w'(x) = \frac{1}{12000}(20x^3 - 97.5x^2 + 200).$$

Командата

```
roots([20, -97.5, 0, 200])
```

дава корените на $w'(x)$: -1.2751, 1.8047 и 4.3454 m. В интервала [0,4] е само вторият корен. Следователно стойността на x , за която $w(x)$ достига максимум е $x = 1.8047$ (не е средата на гредата!) и този максимум е

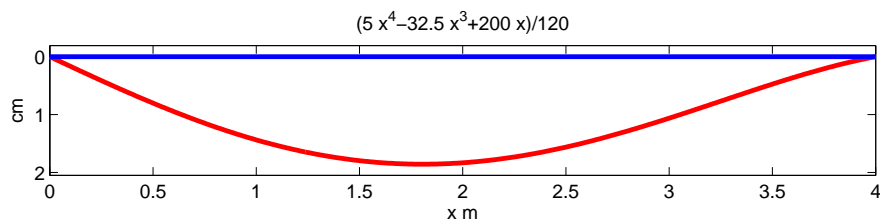
$$222.9497/120 = 1.8579cm.$$

Изместването на максимума на деформация се дължи на допълнителния момент в дясната опора, който “олекотява” дясната част на гредата.

Със следните команди

```
ezplot(' (5*x^4-32.5*x^3+200*x)/120', [0, 4]);hold on;  
plot([0,4], [0,0]);
```

се начертава графиката на деформираната греда, която след козметична обработка с графичните средства на Matlab добива вида:



Фигура 12:

8 Огъване на греда лежаща на еластична основа

$$w^{(4)}(x) = -\frac{q(x) - cw(x)}{EI_y},$$

където членът $cW(x)$ отчита реакцията (на единица дължина) на еластичната основа.