Глава 3

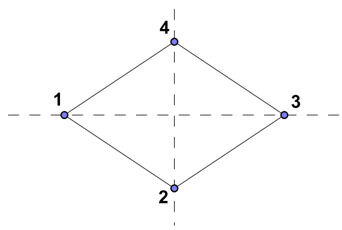
Групи, геометрични фигури и графи.

3.1 Групи от симетрии на геометрични фигури.

Дефиниция 3.1.1 *Симетрия на равнинна (съответно пространствена) геометрична фигура наричаме всяка еднаквост в равнината (пространството), което довежда фигурата в себе си.*

Очевидно композицията (наричана произведение) на симетрии е също симетрия на фигурата. Освен това еднаквостите запазват дължините и ъглите, т. е. те са изометрии (т. е. ортогонални преобразования) в равнината (пространството). Следователно симетриите на дадена геометрична фигура образуват подгрупа на групата от ортогонални преобразувания в равнината (пространството). В частност, в равнината тези симетриите могат да бъдат или ротации около точка или осеви симетрии.

3.1.1 Група от симетрии на ромба.

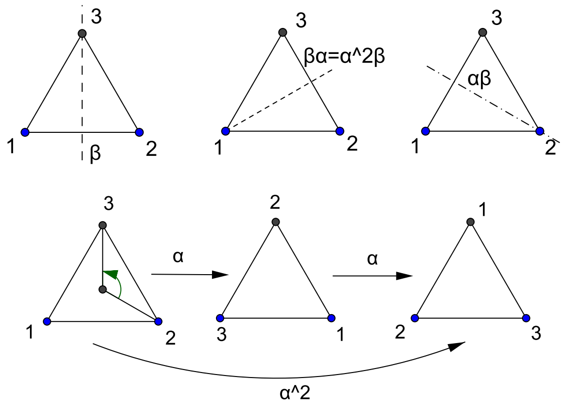


Да номерираме върховете на ромба с числата от 1 до 4. Ромба има само четири симетрии: идентитета, симетриите относно двата диагонала и тяхната композиция, която представлява централна симетрия относно центъра на ромба. Всяка от тези симетрии пермутира върховете (но не всяка пермутация на числата от 1 до 4 поражда симетрия на ромба!). Например, осевата симетрия относно диагонала $\{1, 3\}$ представлява транспозицията (24) на върховете. По този начин ние може да разглеждаме групата G от симетрии на ромба като подгрупа на S_4 и тя е изоморфна на групата на Клаин:

$$G = \{\epsilon, (13), (24), (13)(24)\} =< (13) > \times < (24) >\cong K_4.$$

3.1.2 Група от симетрии на триъгълника.

Да разгледаме равностранен триъгълник, чиито върхове са номерирани (обратно на часовниковата стрелка) с числата 1, 2 и 3 (виж фиг. 3.1). Да означим с α ротацията на 120° обратно на часовниковата стрелка относно центъра на триъгълника. Тя действа върху множеството от върхове на триъгълника като тройния цикъл (123) и затова ние ще използваме знака за равенство за да запишем това съответствие: $\alpha = (123)$, $\alpha^2 = (132)$ и $\alpha^3 = \epsilon$. Освен от трите въртения - идентитета ϵ, α и α^2, триъгълникът се запазва от още три еднаквости - осевите симетрии относно трите симетрали: $\beta = (12)$, $\alpha\beta = (13)$ и $\beta\alpha = \alpha^2\beta = (23)$.



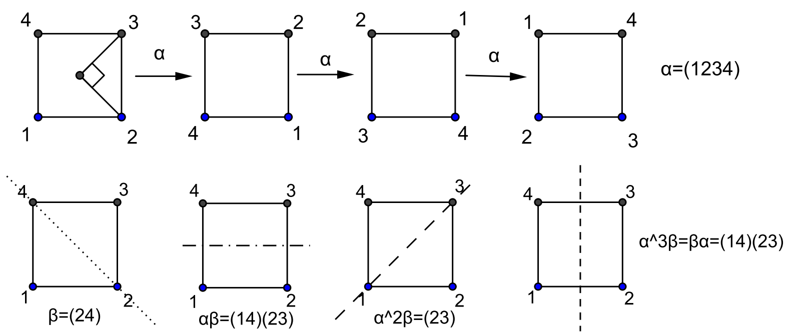
Фигура 3.1: Еднаквости запазващи триъгълника.

Следователно групата от еднаквости на равностранния триъгълник е

$$G = \{\alpha, \beta \mid \alpha^3 = \beta^2 = \epsilon,\ \beta\alpha = \alpha^2\beta\} \cong \{\epsilon, (123), (132), (12), (13), (23)\} = S_3 = D_3.$$

3.1.3 Група от симетрии на квадрата и правилния n-ъгълник.

Номерираме върховете по посока обратно на часовниковата стрелка с числата от 1 до 4. Всяка еднаквост, които запазва квадрата задава пермутация на числата $\{1, 2, 3, 4\}$ и се



Фигура 3.2: Еднаквости запазващи квадрата

определя еднозначно от тази пермутация, т.е. може да интерпретираме еднаквостите като елементи на S_4. Да означим с α ротацията на 90° обратно на часовниковата страна относно центъра на квадрата. Нека β да бъде осевата симетрия относно диагонала през върхове 2 и 4, т.е. $\beta = (13)$. Тогава $\alpha\beta = (14)(23)$ е симетрията относно симетралата на страните 1-4 и 2-3, $\alpha^2\beta = (24)$ е симетрията относно диагонала през върхове 1 и 3, а $\alpha^3\beta = (12)(34)$ е симетрията относно симетралата на страните 1-2 и 3-4. Следователно

$$G = \{\alpha, \beta \mid \alpha^4 = \beta^2 = \epsilon,\ \beta\alpha = \alpha^3\beta\} = \{\epsilon, (1234), (13)(24), (1432), (13), (14)(23), (24), (12)(34)\}$$

е диедралната група с 8 елемента D_4.

Да разгледаме по-общата ситуация, когато имаме правилен n-ъгълник. Аналогично считаме, че върховете му са номерирани с числата от 1 до n в посока обратно на часовниковата стрелка. С α означаваме ротацията на ъгъл $2\pi/n$ обратно на часовниковата стрелка относно центъра на n-ъгълника.
Правилният n-ъгълник се запазва и от n осеви симетрии, но "видът"на осите на симетрии зависи от четността на n. При нечетно $n = 2k + 1$ всички оси се явяват ъглополовящи през връх (и симетрала на срещуположната страна - като в триъгълника). Например остта минаваща през върха с номер 1 задава осевата симетрия (пермутацията) $\beta = (2\,n)(3\,n-1)(4\,n-2)\dots(k+1\ k+2)$. При четно $n = 2k$ осите са два типа: $k = n/2$ са диагонали (ъглополовящите на срещуположните върхове съвпадат), а всяка от останалите k се явява симетрала на две срещуположни страни (виж квадрата!). В първия случай съответната осева симетрия запазва два върха и като пермутация се записва като произведение на $k-1$ транспозиции, например, $\beta = (2\,n)(3\ n-1)(4\ n-2)\dots(k\ k+2)$. Във втория случай съответната осева симетрия не запазва нито един връх и съответната ѝ пермутация се записва като произведение на k транспозиции, например, $\gamma = (1\,n)(2\ n-1)(4\ n-2)\dots(k\ k+1)$. Следователно

$$G = \{\alpha, \beta \mid \alpha^n = \beta^2 = \epsilon,\ \beta\alpha = \alpha^{n-1}\beta\} = D_n$$

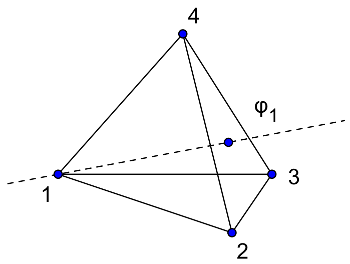
Равенството $\beta\alpha = \alpha^{n-1}\beta$ често се записва и като $(\alpha\beta)^2 = \epsilon$. Кое и да е от тях може лесно да се провери геометрично или чрез умножение на съответните пермутации.

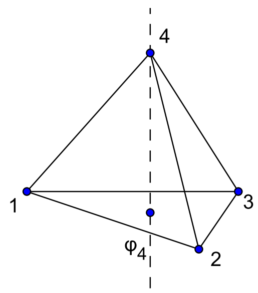
3.1.4 Група от симетрии на тетраедъра.

Разглеждаме правилен тетраедър с върхове 1, 2, 3 и 4. Както знаем от линената алгебра еднаквостите в пространството са или въртене около ос или симетрия относно равнина. Първата съвкупност от въртения, които запазват тераедъра са въртенията на 120° около четирите оси през връх и центъра на срещуположната стена (виж фиг.), а именно

$$\varphi_1 = (234), \quad \varphi_2 = (134), \quad \varphi_3 = (142) = (124)^2, \quad \varphi_4 = (123).$$

Всяко от тези въртения има ред три, т.е. квадратите им са въртения около същата ос (на 120°, но в противоположна посока). Пермутациите, които им съответстват изчерпват всички 8 тройни цикли в S_4 (виж Таблица 2.1).

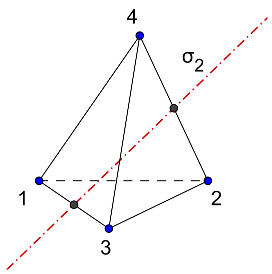


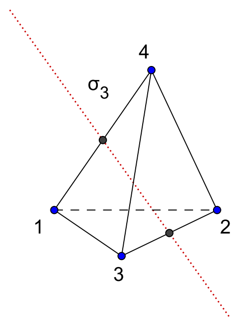


Тетраедърът се запазва и от въртенията $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ на ъгъл 180° около трите оси съединяващи средите на противоположните ребра (виж фигурата долу). Пермутациите, които им съответстват са съответно:

$$\sigma_1 = (12)(34),\ \sigma_2 = (13)(24),\ \sigma_3 = (14)(23), \quad \sigma_j^2 = \epsilon.$$

Тези въртения представят всички пермутации, които са произведение на две транспозиции.





И така заедно с идентитета всички описани въртения образуват група G_0 относно композицията на изображиния, която се състои от 12 въртения. Като група от пермутации тя съвпада с алтернативната група A_4. Ако положим $\alpha = \varphi_4 = (123)$ и $\beta = \varphi_3^2 = (124)$ геометрично или алгебрично може да проверим, че

$$\alpha\beta = (13)(24) = \sigma_2, \quad \beta\alpha = (14)(23) = \sigma_3, \quad \alpha\beta^2\alpha = \beta\alpha^2\beta = \sigma_1 = (12)(34),$$

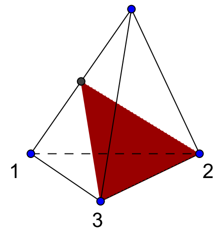
$$G_0 =< \alpha, \beta \mid \alpha^3 = \beta^3 = (\alpha\beta)^2 = \epsilon >= A_4.$$

Да отбележим, че елементите на A_4 не се изчерпват с произведенията $\alpha^k\beta^l$ понеже A_4 има 12, а не 9 елемента (тя не може да се представи като директно или полудиректно произведение на подгрупи). Лесно се проверява и че $(\alpha\beta)^2 = \epsilon$ е еквивалентно и с $\alpha\beta = \alpha^2\beta^2$ както и с $\beta\alpha = \beta^2\alpha^2$.

Сега да разгледаме равнините минаващи през ръб и средата на срещуположния ръб. Има 6 такива равнини и всяка е перпендикулярна на ръба, който разполовява. Следователно симетриите относно тези равнини също запазват тетраедъра като разместват 2 върха и запазват останалите два. Тези 6 осеви симетрии съответстват на шестте транспозиции:

$$\tau_1 = (12),\ \tau_2 = (13),\ \tau_3 = (14),\ \tau_4 = (23),\ \tau_5 = (24),\ \tau_6 = (34),$$

$$\tau_2\tau_1 = (13)(12) = (123) = \alpha.$$

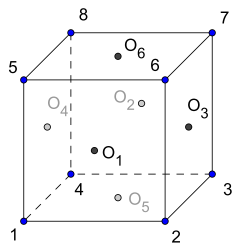


Транспозициите пораждат S_4, така че **пълната група от еднаквости на тетраедъра е точно** S_4.

3.1.5 Група от симетрии на куба.

Означаваме върховете на куба с числата от 1 до 8, а центровете на стените с $O_1, O_2, \ldots, O_6$. Подгрупата от въртенията запазващи куба се състои от 24 елемента, а именно:

1. Въртенията около осите O_1O_2, O_3O_4 и O_5O_6 на ъгъл $90°$. Записани като пермутации това са:



$$\varphi_1 = (1265)(3784); \quad \varphi_2 = (1485)(2376);$$
$$\varphi_3 = (1234)(5678); \quad \varphi_i^4 = \epsilon, \; i = 1, 2, 3.$$

2. Въртенията на ъгъл $120°$ около диагоналите 1-7, 2-8, 3-5 и 4-6:

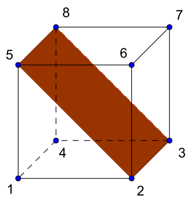
$$\sigma_1 = (245)(386); \quad \sigma_2 = (136)(475); \quad \sigma_3 = (274)(168);$$
$$\sigma_4 = (138)(275); \quad \sigma_i^3 = \epsilon, \; i = 1, 2, 3, 4.$$

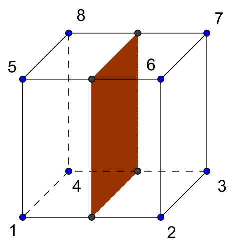
3. Въртенията на ъгъл $180°$ около правите съединяващи средите на срещуположните ръбове:

$$\gamma_1 = (12)(35)(46)(78); \quad \gamma_2 = (14)(28)(35)(67); \quad \gamma_3 = (17)(23)(58)(46);$$
$$\gamma_4 = (17)(28)(34)(56); \quad \gamma_5 = (15)(28)(37)(46); \quad \gamma_6 = (17)(26)(35)(48);$$
$$\gamma_i^2 = \epsilon, \; i = 1, \ldots, 6.$$

За да получим пълната група от еднаквости запазващи куба трябва да добавим и симетриите относно равнини и взевъзможните им произведения с въртенията. Например симетрията отсно равнината определена от върховете 2,3,5 и 8 задава пермутацията $\pi = (16)(47)$, а равнината минаваща през средите на ръбове 1-2, 3-4, 5-6 и 7-8 задава пермутация $\tau = (12)(34)(56)(78)$. Пълната група от еднаквости има 48 елемента:

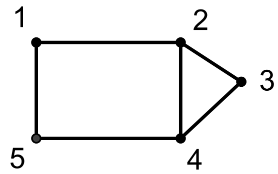
$$G = G_0 \cup \tau G_0 = G_0 \cup \pi G_0.$$





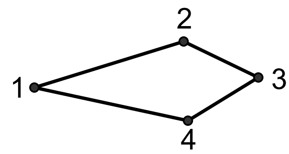
3.2 Автоморфизми на графи.

Дефиниция 3.2.1 *Нека* $\Gamma = (V, E)$ *е (неориентиран) граф, чиито върхове са номерирани с числата от 1 до* $|V|$. ***Автоморфизъм*** *на* Γ *наричаме всеки елемент* $\sigma \in S_{|V|}$, *който запазва съседството, т. е. ако* $i, j \in V$ *са свързани с ребро, то* $\sigma(i)$ *и* $\sigma(j)$ *също са свързани.*



Например, нека Γ е изобразения на фигурата граф с пет върха. Пермутацията $\sigma = (15)(24)$ е автоморфизъм на графа, докато $\pi = (12345)$ не е автоморфизъм, тъй като $E(2,4)$ е ребро, а $E(\pi(2), \pi(4)) = E(3,5)$ не е ребро.

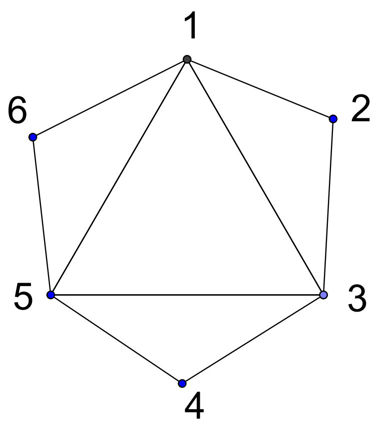
Очевидно автоморфизмите на един граф образуват група относно операцията композиция и тази група ще бележим с $G(\Gamma)$. В горния пример $G(\Gamma) =< \sigma >$.



В отличие от еднаквостите на даден геометричен обект, автоморфизмите на същия разглеждан като граф не е задължително да са изометрии, т.е. да запазват дължините. Пример за тази разлика дава делтоидът. Като геометричен обект групата от еднаквостите (симетриите) е $G_1 = \{\epsilon, (24)\} \cong \mathbb{Z}_2$, докато групата му от автоморфизми разглеждан като граф съвпада с групата от еднаквостите на квадрата, т.е. $G = G(\Gamma) \cong D_4$.

Да отбележим, че ако върховете v и $w = \sigma(v)$ са съответни при автоморфизъм, то те имат едни и същи свойства, в частност те са с еднаква валентност и цикъл през v се трансформира в цикъл през w.

Пример 3.2.1 Да разгледаме графа $\Gamma(V, E)$ с 6 върха и 9 ребра даден на фигура ??.



$V_1 = \{1, 3, 5\}$ са тривалентни, а $V_2 = \{2, 4, 6\}$ двувалентни върхове. Следователно за всяко $\sigma \in G(\Gamma)$ е в сила $\sigma(V_1) = V_1$ и $\sigma(V_2) = V_2$, т. е. ограниченията на σ върху V_1 и V_2 са пермутации от S_3.

Нека $\sigma_0 \in S_3$ оставя неподвижен единия връх на триъгълника от точките на V_1 и разменя другите два, например $\sigma_0 = (35)$. Изображението може да се продължи до автоморфизъм на Γ като оставим неподвижен върха несъседен на 1 и разменим 2 и 6. По точно:

$$\sigma_0 = (35) \quad \longrightarrow \quad \sigma = (35)(26);$$
$$\sigma_0 = (13) \quad \longrightarrow \quad \sigma = (13)(46);$$
$$\sigma_0 = (15) \quad \longrightarrow \quad \sigma = (15)(24);$$

Нека $\sigma_0 \in S_3$ е ротация. Нея я продължаваме с ротация (циклично завъртане) в V_2:

$$\sigma_0 = (135) \;\longrightarrow\; \sigma = (135)(246); \quad \sigma_0 = (153) \;\longrightarrow\; \sigma = (153)(264).$$

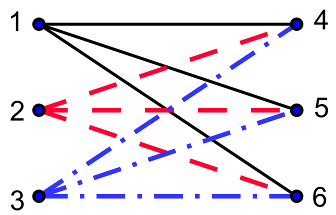
Да отбележим, че $\sigma_0 = (135)$ се продължава еднозначно, тъй като реброто $E(1,2)$ отива в ребро $E(\sigma(1), \sigma(2)) = E(3, \sigma(2))$, а $E(1,2)$ отива в ребро $E(\sigma(3), \sigma(2)) = E(5, \sigma(2))$. Следователно $\sigma(2) = 4$. И така, групата на графа се състои от 6 елемента:

$$G(\Gamma) = \{\epsilon, (135)(246), (153)(264), (13)(46), (35)(26), (15)(24)\} = \{\epsilon, \rho, \rho^2, \tau, \tau\rho, \tau\rho^2\} \cong S_3.$$

Упражнение 3.2.1 *Намерете групата от автоморфизми на пълния граф с 5 върха,* K_5.

Един неориентиран граф наричаме ***двуделен (bipartite)***, когато съвкупността от върховете му може да се разбие на две подмножества, всяко от които не съдържа съседни върхове, т.е. ребро може да свързва само върхове от различни подмножества. Друго често използвано название на такъв граф е ***граф на Танер***.

Пример 3.2.2 Да намерим групата от автоморфизми на пълния двуделен граф $K_{3,3}$. Този граф е начертан на фигура долу вляво.



Произволна пермутация във всяко от двете подмножествата (блока) от върхове $V_1 = \{1,2,3\}$ и $V_2 = \{4,5,6\}$ запазва графа, така че

$$G_0 = S_3 \times S_3 \subseteq G(K_{3,3}) \subset S_6.$$

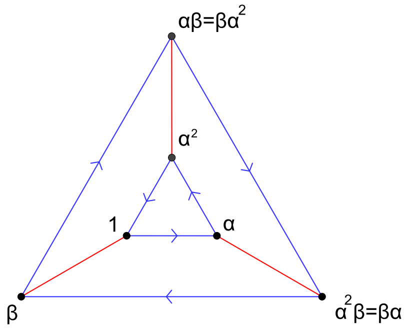
Включването вдясно е строго, тъй като пермутацията (14), например, не запазва графа. За да бъде една пермутация на S_6 елемент от групата $G(K_{3,3})$ е необходимо да трансформира блок в блок. Една такава е пермутацията $\tau = (14)(25)(36)$ и тя изобразява V_1 във V_2. Нека $\sigma \in G(K_{3,3})$ изпраща $V_1 \to V_2$ (и, разбира се, $V_2 \to V_1$). Тогава $\tau^{-1}\sigma$ оставя неподвижни блоковете V_1 и V_2 и следователно $\tau^{-1}\sigma \in G_0$. Това означава, че $\sigma \in \tau G_0$. Следователно $G(K_{3,3}) = G_0 \cup \tau G_0$ и $|G(K_{3,3})| = 72$.

Към групите от автоморфизми на графи ще се върнем в следващите глави на книгата.

3.3 Граф на група.

Между понятията граф и група има и друга връзка. Нека G е група с образуващи $g_1, g_2, \ldots, g_t$. Строим граф Γ_G с $n = |G|$ върха, като два върха v и w са свързани с насочено (от v към w) ребро тогава и само тогава, когато $w = g_i v$ за някое i. Следователно от всеки връх излизат t насочени ребра. Ако $g_i^2 = 1$(цикъл с дължина 2), то за да не се получава двойно ребро заменяме двете насочени ребра с отсечка.

Пример 3.3.1 Да построим графа на $S_3 = D_3 = \{\alpha, \beta \mid \alpha^3 = \beta^2 = 1, \alpha\beta = \beta\alpha^2\}$. Той е изобразен на фигура **??** и представлява два вложени триъгълника. Сините (насочените) ребра представят умножението отляво с α, а червените отсечки умножението отляво с β. Върховете на вътрешния триъгълник изобразяват тройните цикли (ротациите), а на външния транспозициите (осевите симетрии).



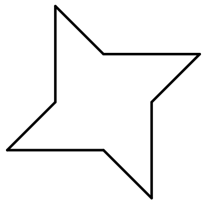
Фигура 3.3: Граф на групата S_3.

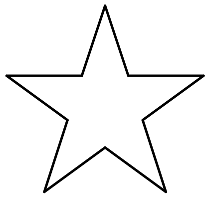
Упражнение 3.3.1 *Да се построи графа на* $D_4 = \{\alpha, \beta \mid \alpha^4 = \beta^2 = 1, \alpha\beta = \beta\alpha^3\}$.

3.4 Допълнителни задачи към Глава 3.

Задача 3.1 *Групата от еднаквостите на куба поражда група от пермутации на страните. Намерете тази група.*

Задача 3.2 *Намерете групите от симетрии на следните фигури:*

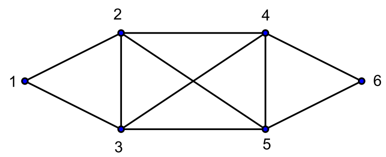




Задача 3.3 *Колко неизоморфни ориентирани графи с 3 върха има?*

Задача 3.4 *Колко са неориентираните графи с 4 върха (неизоморфни)?*

Задача 3.5 *Намерете групата от автоморфизми на графа*



Задача 3.6

Задача 3.7 *Да се построи графа на алтернативната група* A_4.