Функционални редици и редове

1)

Д: Нека е дадена редица от функции

(1) $$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

дефинирани в подмножество $D \subseteq \mathbb{R}$

Казваме, че редицата (1) е сходяща, ако $\forall t \in D$

$$f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t), \dots$$

е сходяща редица от реални числа. ~~Ако~~ с граници, които да означим с $f(t)$. Функцията $f(x)$ дефинирана в D с

$$f(x) = f(t) \text{ за } \forall x = t \in D$$

се нарича граница на (1) и бележим

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

Примери:

① $f_n(x) = x^n$; $D = (-1, 1]$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, т.е. $f(x) \equiv 0\ \forall x \in (-1, 1]$

② $f_n(x) = \frac{x}{n}$; $D \equiv \mathbb{R}$, $\frac{x}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ т.е. $f(x) \equiv 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

③ $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$, $D \equiv \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, т.е. $f(x) \equiv 0 \in \mathbb{R}$

④ $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, $D \equiv \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x\ \forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = e^x$

⑤ $\{r_n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$ $f_n(x) = x^{r_n}$ $D: \{x > 0 \mid x \in \mathbb{R}\}$ $\lim\limits_{n\to\infty} x^{r_n} = x^\alpha$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^\alpha$, $x \in \mathbb{R}^+$

⑥ $f_n(x) = \frac{1 - x^n}{1 - x}$, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 1\}$ $\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{1-x} = f(x)$

$\forall x \in \mathcal{D}$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ означава, че

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon, x) : \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Въпрос(?): Дали $\exists N(\varepsilon)$, което не зависи от x, т.е. едно и също за $\forall x \in \mathcal{D}$?

Пример: $f_n(x) = \frac{x}{n}$ Да предположим, че $\exists N = N(\varepsilon)$ такова, че $\left|\frac{x}{n} - 0\right| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$ и $\forall x$

Да вземем $n > N \Rightarrow |x| < \varepsilon n \; \forall x$, което обаче не е вярно, ако вземем достатъчно голямо x.

Пример: $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$, $\mathcal{D} \equiv \mathbb{R}$

$|f_n(x)| = \frac{|\sin nx|}{n} < \frac{1}{n} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Сл. $|f_n(x) - 0| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}$ и $\forall n > \frac{1}{\varepsilon}$

Деф. Казваме, че редицата (1) е равномерно сходяща, ако $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon)$, независещо от x, такова че $\forall n > N$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathcal{D}.$$

$\left\{\frac{x}{n}\right\}$ не е равномерно сх., а $\left\{\frac{\sin nx}{n}\right\}$ е равном. сход.

Упр.: Покажете, че $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ е равномерно сходяща към 0, а $g_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ не е. И за двете $\mathcal{D} = [0, 1]$

(Болцано-Коши)

T. Редицата (1) е равномерно сходяща $\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon)$, независещо от x, ~~такова~~ такова, че за всяко $n > N$ и $\forall\, k = 1, 2, 3, \dots$ е изпълнено

$$\left| f_{n+k}(x) - f_n(x) \right| < \varepsilon$$

T: Ако редицата $\{f_n(x)\}$ е равномерно сходяща в D и елементите ѝ са непрекъснати в D, то и функцията $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ е непрекъсната в D.

Пример: $f_n(x) = x^n$, $D = [0,1]$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ - прекъсната

и $\{f_n(x)\}$ не е равномерно сх.

$f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2 x^2}$, $D = [0, 1]$ не е равномерно сходяща

но $f(x) \equiv 0$ $\forall x \in [0, 1]$

Нека $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$ е редица от функции дефинирани в $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$. Ако редицата ~~от~~

$$s_n(x) \stackrel{def}{=} u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$$

е сходяща, то казваме, че редът

(2) $\quad u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$

е сходящ в $\mathcal{D}$ и $s(x) = \lim_{n \to \infty} s_n(x)$ наричаме негова сума. ~~Ако~~ ф. $s_n(x)$ се наричат (както при редове от числа) частични суми на (2).

Ако $\{s_n(x)\}$ е равномерно сходяща, то и (2) наричаме равномерно сходящ.

D: Степенен ред наричаме функционален ред от вида

(3) $\quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad ,$

където $a_i \in \mathbb{R}$, т.е. $u_n(x) = a_n x^n$

По общо

(4) $\quad a_0 + a_1 p(x) + a_2 p^2(x) + \dots + a_n p^n(x) + \dots$

където $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ полином над $\mathbb{R}$.

~~Например~~

Пример $u_n(x)=x^n$

а) $1+x+x^2+\dots+x^n+\dots$,

б) $1+2(x-a)+3(x-a)^2+\dots+n(x-a)^{n-1}+\dots$

$(p(x)=(x-a))$

Редът от пример а) е сходящ за $x\in D=(-1,1)$.

Той като ~~редица~~ от частични суми е сходяща

$$S_n(x)=1+x+\dots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{1-x}$$

Затова записваме $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\dots+x^n+\dots$

<u>Достатъчно условие за равномерна сходимост:</u>

<u>Тв</u>: ~~Нека~~ Ако членовете $u_n(x)$ на функционалния ред (2) удовлетворяват

$$|u_n(x)|\le a_n,\quad \forall n=1,2,\dots\quad \forall x\in D$$

където a_n са членове на абсолютно сходящ числов ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=a_1+a_2+\dots+a_n+\dots$,

то (2) е равномерно сходящ в D

Пример $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ е равномерно сходящ

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}\quad \text{и}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\ \text{сходящ.}$$

Т: Областта на сходимост $\mathcal{D}$ на степенния ред
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$
е интервал с център 0. В частност $\mathcal{D}$ може да е точка $(x=0)$ или ~~цялата р~~ $\mathbb{R}$.

Ако $\mathcal{D} = (-r, r)$, то r наричаме радиус на сходимост на реда. При $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, казваме, че $r = \infty$, а в другия случай $r = 0$. / За $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$, $\mathcal{D} = (a-r, a+r)$ /

Пример $\quad 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \qquad r = \infty$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$ е сходящ в

$\mathcal{D} = [-1, 1)$, радиуса $r = 1$, ~~поне~~ при $x = -1$ е сходящ, докато за $x = 1$ е разходящ, той като $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ е сх., а $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - разходящ.

Горната теорема е следствие от следната теорема на Абел

Т: Ако $\sum_{n} a_n x^n$ е сходящ за $x = x_0 \neq 0$, то той е равномерно сходящ за $\forall x: |x| \leq r$, $r < |x_0|$

Т: (Следствие) Нека $f(x)$ е непрекъсната за $x \in [-R, R]$ и
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{за } x \in (-R, R)$$
Ако $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ е сходящ за $x = R$ (или $-R$), то
$$f(R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \stackrel{df}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n) x^n$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0) x^n$$

$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \dots$$

Всеки член е сума от краен брой произведения, така че е добре дефиниран

Нека $A_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} x^n$, $m = 0, 1, 2, \dots$

$$A(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n, \quad A_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{mn}$$

ако са сходящи

$$(1-x)(1+x+x^2+\dots+x^n+\dots) = 1 + (1-1)x + (1-1)x^2 + \dots = 1$$

и имаме $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-(x/2)} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \dots + \frac{x^n}{2^n} + \dots\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + \dots + \frac{x^n}{2^{n+1}} + \dots$$

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{1-(x-1)} = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + \dots + (x-1)^n + \dots$$

Диференциране и интегриране на степенни редове

Т: Нека $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ има радиус на сходимост $R>0$. Тогава $f(x)$ е диференцируема за $\forall x \in (-R, R)$ и

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Пример: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \qquad x \in (-1, 1)$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = + \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + n x^{n-1} + \dots$$

$$(1-x)^2(1+2x+3x^2+\dots) = 1 + (\underbrace{-2+2}_{0})x + (\underbrace{1-4+3}_{0})x^2 + (\underbrace{2-6+4}_{0})x^3 + \dots$$

Т: Нека $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ има радиус на сходимост $R>0$. Тогава $\forall x \in (-R, R)$ е сходящ редът

$$c + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = F(x),$$

$$\left(F(x) = \int f(x)\,dx \right)$$

където $F'(x) = f(x)$

Пример (1)

$$\operatorname{arctg} x = \int \frac{dx}{1+x^2} = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots) dx =$$

$$= C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

$C = \operatorname{arctg} 0 = 0$

С. $$\boxed{\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}}$$

(2) Да се ~~оцени~~ развие в степенен ред $\int_0^x e^{-t^2} dt$

и оцени с точност 0,0001 за $t=1$

$$e^{-t^2} = 1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!} + \dots$$

$$\int e^{-t^2} dt = t - \frac{t^3}{3 \cdot 1!} + \frac{t^5}{5 \cdot 2!} - \frac{t^7}{7 \cdot 3!} + \dots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1) n!} + \dots$$

С. $$\int_0^x e^{-t^2} dt = x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1) \cdot n!} + \dots$$

$$\int_0^1 e^{-t^2} dt = \underbrace{1 - \frac{1}{3 \cdot 1!} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{9 \cdot 4!}}_{0,7475} + R_n \qquad |R_n| \le \frac{1}{11 \cdot 5!} = \frac{1}{1320} < 10^{-4}$$

С. $$\int_0^1 e^{-t^2} dt = 0,7475 \text{ с точност } 10^{-4}$$

Метод на неопределените коефициенти.

Ако искаме да развием $f(x)$ в степенен ред

предполагаме, че

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

и се опитаме от някакви връзки м/у $f(x)$ и производните ѝ да определим тези $\{a_n\}$

Пример ① $f(x)=e^x \Rightarrow f'(x)=e^x$

$$f'(x)=a_1+2a_2x+\dots=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Сл. $a_0=a_1,\ a_1=2a_2,\ \dots,\ a_{n-1}=n a_n,\ \Rightarrow a_n=\frac{1}{n!}$

$a_0=f(0)=e^0=1$ С.

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$$

② $f(x)=(1+x)^t,\ t\in\mathbb{R}$ Да се развие в/у $f(x)=\sum_{n=0} a_n x^n$

$f'(x)=t(1+x)^{t-1} \Rightarrow (1+x)f'(x)=tf(x)$ С.

$$(1+x)(a_1+2a_2x+\dots+na_nx^{n-1}+(n+1)a_{n+1}x^n+\dots)=ta_0+ta_1x+\dots$$

С. $a_1+(2a_2+a_1)x+(3a_2+2a_2)x^2+\dots+((n+1)a_{n+1}+na_n)x^n+\dots=\sum_{n=0} ta_n x^n$

И така $a_1=ta_0;\ 2a_2+a_1=ta_1;\ \dots;\ (n+1)a_{n+1}+na_n=ta_n$.

Обаче $f(0)=1 \Rightarrow a_0=1 \Rightarrow a_1=t$

$$a_2=\frac{t-1}{2}a_1=\frac{t(t-1)}{2};\ \dots\dots\ a_{n+1}=\frac{t-n}{n+1}\underset{a_n}{\underbrace{a_n}}=\frac{t(t-1)\dots(t-n)}{(n+1)!}$$

Т! (Т-ма на Тейлор) Нека $f(x)$ е дефинирана и поне $n+1$ пъти диференцируема в интервал Δ съдържащ точката a.
Тогава

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + R_n,$$

където $R_n = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))$, $0<\theta<1$, θ зависи от $f(x)$, x, a, n

(остатъчен член с форма на ~~Коши~~ Лагранж)

Т! Ако $f(x)$ е безброй пъти диференцируема в околност O на т. a, то $f(x)$ се развива в ред на Тейлор около a

$$f(x) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

$\Longleftrightarrow$ остатъчния член $R_n \to 0$ (за изключение a)

Развитието около $a=0$ се нарича ред на Маклорен

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

$$\left(R_n = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right)$$

Да се развие $f(x)=\sin x$ в Маклоренов ред

$f'(x)=\cos x,\ f''(x)=-\sin x,\ f'''(x)=-\cos x;\ f^{(4)}(x)=\sin x$

$$\sin x = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\dots$$

$f(0)=\sin 0=0;\ f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=-1,\ f^{(4)}(0)=0$

$$\boxed{\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\dots}$$

$\cos x = (\sin x)'$ Сл.

$$\boxed{\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\dots}$$

Њутнов бином: $f(x)=(1+x)^t,\ t\in\mathbb{R}$. $f^{(n)}(x)=t(t-1)\dots(t-n+1)(1+x)^{t-n}$

$f'(x)=t(1+x);\ f''(x)=t(t-1)(1+x)^{t-2};\dots$

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!}\overset{\text{def}}{=}\binom{t}{n}$$

Сл. $$\boxed{(1+x)^t=1+\binom{t}{1}x+\binom{t}{2}x^2+\dots+\binom{t}{n}x^n+\dots}$$