Тройни интеграли

Нека $B = \{(x,y,z) \mid a \le x \le b,\ c \le y \le d,\ m \le z \le n\}$ е паралелепипед. Тройният интеграл се въвежда аналогично на двумерния случай с риманови суми и е в сила

$$\boxed{\iiint\limits_B f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b\int_c^d\int_m^n f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}$$

За произволни тела тройния интеграл също се дефинира аналогично на двумерния случай. В частност, ако

$$B = \{(x,y,z) \mid (x,y)\in D,\ g(x,y) \le z \le h(x,y)\},$$

то

$$\boxed{\iiint\limits_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_D \left[\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right]dx\,dy} \qquad \text{тип I}$$

Аналогично и по y и z

$$B = \{(x,y,z) \mid (x,z)\in D,\ g(x,z) \le y \le h(x,z)\}$$

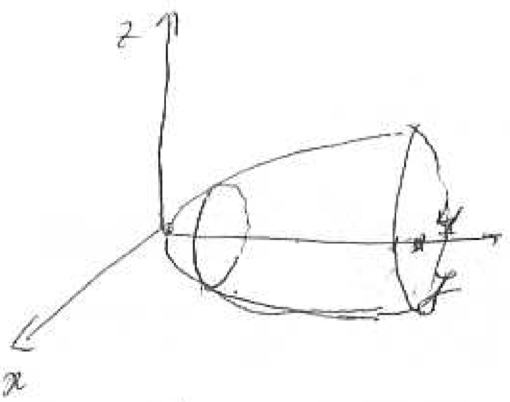
$$\boxed{\iiint\limits_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_D \left[\int_{g(x,z)}^{h(x,z)} f\,dy\right]dx\,dz} \qquad \text{тип II}$$

$$B = \{(x,y,z) \mid (y,z)\in D,\ g(y,z) \le x \le h(y,z)\}$$

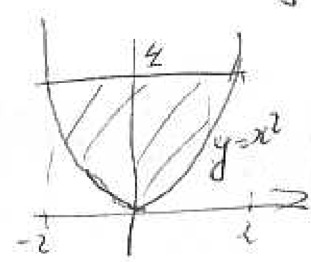
$$\boxed{\iiint\limits_B f\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_D \left[\int_{g(y,z)}^{h(y,z)} f(x,y,z)\,dx\right]dy\,dz} \qquad \text{тип III}$$

Пример: ① $I=\iiint\limits_B \sqrt{x^2+z^2}\,dxdydz$, където B е тялото

определено от параболоида $y=x^2+z^2$ и равн. $y=4$



Сечението с Oxy е $y=x^2$, $y=4$



Ако разглеждаме интеграла като тип 1, то

$$B=\left\{(x,y,z)\ \middle|\ -2\le x\le 2,\ x^2\le y\le 4,\ -\sqrt{y-x^2}\le z\le\sqrt{y-x^2}\right\}$$

т.е.

$$I=\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\int_{-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}}\sqrt{x^2+z^2}\,dz\,dy\,dx$$

Но този интеграл е доста труден за пресмятане.

Като тип 2 получаваме

$$B=\left\{(x,y,z)\ \middle|\ x^2+z^2\le 4,\ x^2+z^2\le y\le 4\right\}$$

$$I=\iint\limits_D\left[\int_{x^2+z^2}^{4}\sqrt{x^2+z^2}\,dy\right]dxdz\ ,\qquad D:\ x^2+z^2\le 4,\ \text{т.}$$

$$D=\{-2\le x\le 2,\ z^2\le 4-x^2\}$$

$$I=\iint\limits_D\sqrt{x^2+z^2}\,(4-x^2-z^2)\,dx\,dz=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{x^2+z^2}\,(4-x^2-z^2)\,dz\,dx$$

$x=r\cos\theta$; $z=r\sin\theta$, $0\le\theta\le 2\pi$, $0\le r\le 2$

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^2(4-r^2)\,r.r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta.\int_0^2(4r^2-r^3)\,dr=\frac{128\pi}{15}$$

Маса и центъра масата на тяло

Нека B е тримерно тяло с плътността ф-я $\rho(x,y,z)$. Общата маса се дава:

$$m = \iiint\limits_B \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Координатите на центъра $M(x_0, y_0, z_0)$ се дават с

$$\boxed{x_0 = \frac{1}{m}\iiint\limits_B x\rho\,dx\,dy\,dz;\quad y_0 = \frac{1}{m}\iiint\limits_B y\rho\,dx\,dy\,dz;\quad z_0 = \frac{1}{m}\iiint\limits_B z\rho\,dx\,dy\,dz}$$

Смяна на променливите

$$x = g(u,v,w);\ y = h(u,v,w),\ z = k(u,v,w)$$

g, h и k гладки

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$ якобиан

$$\boxed{\iiint\limits_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_E f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\,|J|\,du\,dv\,dw}$$

Цилиндрични координати

Понякога е удобно да преминем към цилиндрични координати

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z$$

$$J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

$$B = \{(r,\theta,z) \mid \alpha \le \theta \le \beta,\ g(\theta) \le r \le h(\theta),\ u(r,\theta) \le z \le v(r,\theta)\}$$

$$\boxed{\iiint_B f\,dV = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{g(\theta)}^{h(\theta)}\int_{u(r,\theta)}^{v(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\,dz\,dr\,d\theta}$$

Сферични координати

$$\boxed{x = r\sin\varphi\cos\theta, \quad y = r\sin\varphi\sin\theta, \quad z = r\cos\varphi}$$

$$J = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -r\sin\varphi \end{vmatrix} =$$

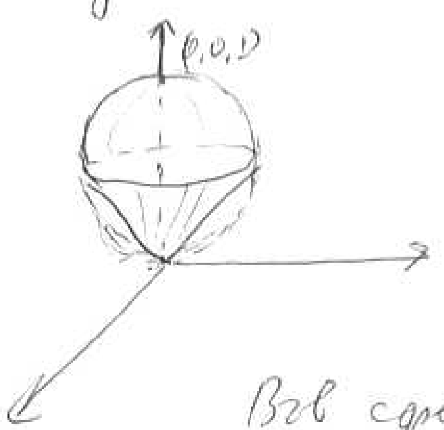
$$= -r^2\sin^3\varphi - r^2\cos\varphi\sin\varphi\cos\varphi = -r^2\sin\varphi.$$

$$\iiint\limits_{B} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{\gamma}^{\delta}\int_{\alpha}^{\beta}\int_{a}^{b} f(x,y,z)\, r^2 \sin\varphi \, dr\, d\theta\, d\varphi ,$$

$$B = \{(r,\theta,\varphi) \mid r \in [a,b],\ \theta \in [\alpha,\beta],\ \varphi \in [\gamma,\delta]\}$$

$0 \le \beta - \alpha \le 2\pi \qquad 0 \le \delta - \gamma \le \pi$

Пример: Да се намери обемът на тялото заключено м/у конуса $z = \sqrt{x^2+y^2}$ и сферата $x^2+y^2+z^2 = z$



$x^2+y^2+z^2-z=0 \Rightarrow x^2+y^2+z^2-z+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

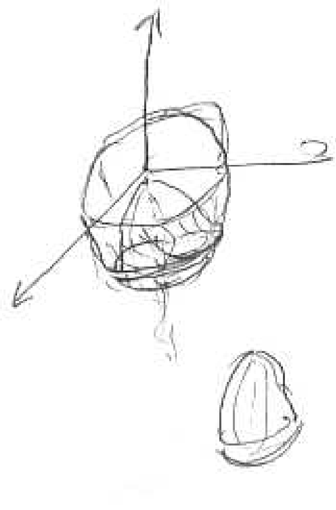
$x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$B = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le \frac{1}{4},\ \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{\frac{1}{4}-x^2-y^2}+\frac{1}{2}$

Във сферични координати е по-добре. Отг. $\frac{\pi}{8}$

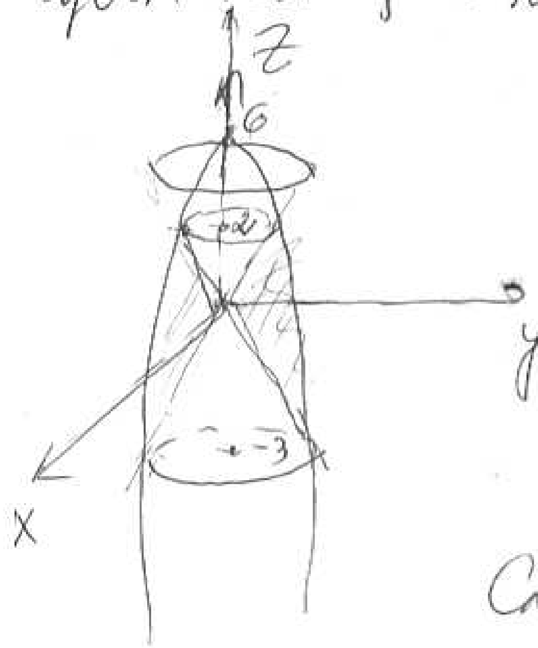
Домашно: Намерете обема на тялото

$$G: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=18 \\ 3z+x^2+y^2 \le 0 \end{cases}$$



Намерете обема на тялото $G: \left| \begin{array}{l} x^2+y^2 \ge z^2 \\ z = 6-x^2-y^2 \end{array}\right.$

Решение $x^2+y^2 \ge z^2$ е частта от пространството извън конуса $K: x^2+y^2-z^2=0$.



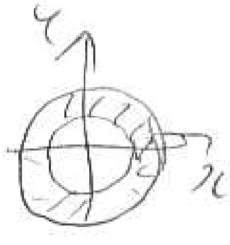
$\sigma: z=6-x^2-y^2$ е параболоид и понеже G е "вътре" за него, т.е. $z \le 6-x^2-y^2$

$K \cap \sigma: \; z = 6-z^2$ т.е.

$z^2+z-6=0 \Rightarrow z_1=-3, \; z_2=2$

Сл. за G $\quad -3 \le z \le 2$

Въвеждаме цилиндрични координати



$$\left| \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} r^2 = x^2+y^2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{array}$$

сечение с $z=z_0$: $z_0^2 \le x^2+y^2 \le 6-z_0$

От $z^2 \le x^2+y^2 \le 6-z$ следва

$z^2 \le r^2 \le 6-z$, т.е. $|z| \le r \le \sqrt{6-z}$ $\quad$ ($\sqrt{6-z} \ge |z|$ за $z \in [-3,2]$)

$$V = \int_{-3}^{2}\int_{0}^{2\pi}\int_{|z|}^{\sqrt{6-z}} r\,dr\,d\theta\,dz = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\int_{-3}^{2}\int_{z^2}^{6-z} d(r^2)\,dz\right) =$$

$$= \pi \cdot \int_{-3}^{2} (6-z-z^2)\,dz = \pi\left(6z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{2} = \frac{125\pi}{6}$$