Векторна ф-я на скаларен аргумент

Д: Векторна ф-я на скаларен аргумент наричаме ф-я дефинирана в $D \subseteq \mathbb{R}$ и приемаща стойности в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$

$$r(t) = (f(t), g(t), h(t)) = f(t)\bar{i} + g(t).j + h(t).k$$

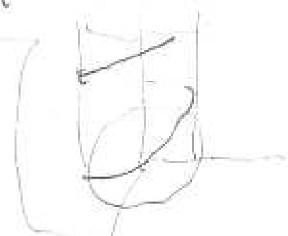
Пример:

(1) $l(t) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$ деф. в $\mathbb{R}$

задава права линия през т. (x_0, y_0, z_0), колинеарна с вектора $\vec{l} = (a, b, c)$.

(2) $r(t) = (r\cos t, r\sin t)$ задава окръжност $x^2 + y^2 = r^2$ в $\mathbb{R}^2$.

(3) $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$ задава спирала усукваща се около цилиндъра $x^2 + y^2 = 1$ в $\mathbb{R}^3$



(4) $r(t) = (t^2 + 2t, t + 1)$, задава парабола $x = y^2 - 1$ в равнината

Как "изключим" t: $t = y - 1$

$x = (y-1)^2 + 2(y-1) = y^2 - 1$

Д: Под граница на $r(t)$ при $t \to a$ разбираме

$$\lim_{t\to a} r(t) = \left(\lim_{t\to a} f(t), \lim_{t\to a} g(t), \lim_{t\to a} h(t) \right)$$

ако границите на f, g и h съществуват.

Пример: $r(t) = \left(1+t^3, te^{-t}, \frac{\sin t}{t}\right)$

$$\lim_{t\to 0} r(t) = \left(\lim_{t\to 0} (1+t^3), \lim_{t\to 0} (te^{-t}), \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} \right) = (1, 0, 1)$$

Д: $r(t)$ е непрекъсната в т. $t = a$, ако

$$\lim_{t\to a} r(t) = r(a).$$

Д: Под производна на $r(t)$ разбираме

$$\frac{dr}{dt} = r'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{r(t+h) - r(t)}{h}$$

ако границата съществува

$r'(t)$ - допирателен вектор към $r(t)$ при условие че $r'(t)$ съществува и $\underline{r'(t) \neq 0}$ в т. t.

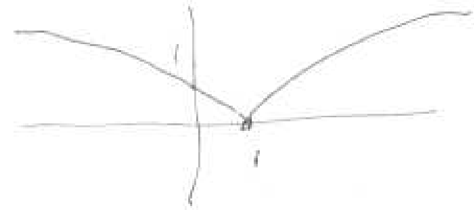
$$\vec{t} = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}$$

Т: Ако f, g и h са диференцируеми, то

$$r'(t) = (f'(t), g'(t), h'(t))$$

Втора производна $r''(t) = (r'(t))'$

Д: Кривата $r(t)$ наричаме гладка в интервала (a,b), ако $r'(t)$ е непрекъсната в интервала и $r'(t) \neq 0$



<u>Пример:</u> $r(t) = (1+t^3, t^2)$

$r'(t) = (3t^2, 2t) \quad r'(0) = (0,0)$

т.е. кривата не е гладка

за т. $t=0$ т.е. $(1,0)$

Т: Ако u и v са диференцируеми, то $\forall c \in \mathbb{R}$ и $f(t)$ ~~реална~~ $\in \mathbb{R}$ е в сила

1) $\frac{d}{dt}[u(t)+v(t)] = u'(t) + v'(t)$

2) $\frac{d}{dt}[c\,u(t)] = c\,u'(t)$

3) $\frac{d}{dt}[f(t)\,u(t)] = f'(t)\,u(t) + f(t)\,u'(t)$

4) $\frac{d}{dt}[\underset{\text{скаларн.}}{u(t) \cdot v(t)}] = \underset{\text{скалар}}{u'(t) \cdot v(t)} + u(t)\,v'(t)$

5) $\frac{d}{dt}[u(t) \times v(t)] = u'(t) \times v(t) + u(t) \times v'(t)$

6) $\frac{d}{dt}[\vec{u}(f(t))] = f'(t)\,\vec{u}'(f(t))$

Пример: Да намерим у-нието на допирателната в точката $A(0,1,\frac{\pi}{2})$ към кривата

$\gamma(x,y,z)=r(t)$: $\quad x=2\cos t,\ y=\sin t,\ z=t$

$$r'(t)=(x',y',z')=(-2\sin t,\ \cos t,\ 1)$$

A от кривата, т.к. $r(t_0)=(0,1,\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \boxed{t_0=\frac{\pi}{2}}$

Допирателен вектор:

$$r'(t_0)=(-2\sin\frac{\pi}{2},\ \cos\frac{\pi}{2},\ 1)=(-2,0,1) \Rightarrow \|r'(t_0)\|=\sqrt{5}$$

$$\vec{T}=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,0,1)$$

Параметрично у-ние на допирателната:

$$\boxed{\left|\begin{array}{l} x=0-2s \\ y=1+0.s \\ z=\frac{\pi}{2}+s \end{array}\right. ,\ s\in\mathbb{R} \quad \text{общо} \quad \left|\begin{array}{l} y=1 \\ x+2z=\pi \end{array}\right.}$$

$$\int_a^b \vec{r}(t)\,dt = \left(\int_a^b f(t)\,dt,\ \int_a^b g(t)\,dt,\ \int_a^b h(t)\,dt \right)$$

където $\vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$

<u>Дължина дъга:</u>

$\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$

$a \le t \le b$

$$S = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt = \int_a^b |r'(t)|\,dt$$

$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$$S = \int_a^b |r'(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$

<u>Пример</u> Да намерим дължината на дъгата от т. $(1,0,0)$ до $(1,0,2\pi)$ за $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$

$r'(t) = (-\sin t, \cos t, 1) \Rightarrow \|r'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$

$(1,0,0) \Leftrightarrow t = 0$, $(1,0,2\pi) \Leftrightarrow t = 2\pi$

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,dt = \underline{2\sqrt{2}.\pi}$$

$$s = s(t) = \int_0^t \sqrt{2}\,du = t\sqrt{2} \Rightarrow t = \frac{s}{\sqrt{2}}$$

Сл. $\vec{r}(s) = \left(\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$ - естествено параметризир.

Нека C е частично гладка крива зададена с

$$\vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t)) \text{ в } a \le t \le b$$

Функцията
$$s(t) = \int_a^t |r'(u)|\,du = \int_a^t \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2}\, du$$

дава дължината на дъгата от началната точка $\vec{r}(a)$ до $\vec{r}(t)$.

Очевидно, че $\frac{ds}{dt} = s'(t) = \|r'(t)\|$

Ако $r(t) = r(t(s))$, казваме че C е параметризирана по дължината на дъгата или още "естествено параметризирана"

Def: Кривина на кривата зададена с $\vec{r}(t)$ наричаме

$P(x_0, y_0, z_0)$ определена от t_0 наричаме

$$K(t) = \left\| \frac{d\vec{T}}{ds}(s_0) \right\|.$$

където $\vec{T}$ е тангентния вектор в т. P (единичен вектор)

т.е. за $s_0 \Leftrightarrow t_0$

Ако параметризираме кривата по s, т.е.

$\vec{T}(t) = \vec{T}(s(t))$, то

$$\vec{T}'(t) = \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = \|r'(t)\| \frac{d\vec{T}}{ds},$$ тъй като $\frac{ds}{dt} = \|r'(t)\|$

Сл. $$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{\|r'(t)\|} \vec{T}'(t)$$

Сл. $$\boxed{\kappa(t) = \frac{\|T'(t)\|}{\|r'(t)\|}}$$

Пример. Да разгледаме кривата от предния пример

$C: r(t) = (\cos t, \sin t, t)$

$r'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ $\quad \|r'(t)\| = \sqrt{2} \quad \forall t.$

$T(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t, \cos t, 0)$

$T'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t, -\sin t, 0)$ $\quad \|T'(t)\| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$

Сл. $\boxed{\kappa(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}} \ \forall t$